N° D'ORDRE : 9
SÉRIE U.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

(Mention : *Sciences*)

PAR

M. Maurice ROY.

Ancien élève de l'École polytechnique et de l'École nationale supérieure des Mines,
Ingénieur au corps des Mines.

1re **THÈSE.** — RECHERCHES SUR LES SURFACES PORTANTES EN AÉRODYNAMIQUE.

2e **THÈSE.** — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 AVR 1923, devant la Commission d'Examen.

MM. E. ESCLANGON, *Président.*
H. VILLAT,
R. THIRY. } *Examinateurs.*

PARIS

GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55

1923

N° D'ORDRE : 9
SÉRIE U.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE STRASBOURG

POUR OBTENIR

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG
(Mention : *Sciences*)

PAR

M. Maurice ROY.
Ancien élève de l'Ecole polytechnique et de l'École nationale supérieure des Mines,
Ingénieur au corps des Mines.

1re **THÈSE.** — RECHERCHES SUR LES SURFACES PORTANTES EN AÉRODYNAMIQUE.

2e **THÈSE.** — PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 17 AVR 1923, devant la Commission d'Examen.

MM. E. ESCLANGON, *Président.*
H. VILLAT, R. THIRY, *Examinateurs.*

PARIS
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Quai des Grands-Augustins, 55
—
1923

FACULTÉ DES SCIENCES

DE

L'UNIVERSITÉ DE STRASBOURG

Doyen :

M. MULLER (P.), professeur de Chimie générale et Chimie physique

Doyen honoraire : BATAILLON (E.).

Professeurs :

MM.	
DENJOY (A.)	Mathématiques générales.
VALIRON (G.)	Calcul différentiel et intégral.
VILLAT (H.)	Mécanique.
FRÉCHET (M.)	Analyse supérieure.
ESCLANGON (E.)	Astronomie.
WEISS (P.)	Physique générale.
OLLIVIER (H.)	Physique générale.
ROTHÉ (E.)	Physique du Globe.
HACKSPILL (L.)	Chimie minérale.
GAULT (H.)	Chimie organique.
TOPSENT (E.)	Zoologie et Anatomie comparée.
HOUARD (C.)	Botanique.
TERROINE (E.)	Physiologie générale.
DE LAPPARENT (J.)	Pétrographie.
GIGNOUX (M.)	Géologie et Paléontologie.
CHATTON (E.)	Biologie générale.
BAUER (E.)	Physique mathématique.
CORNEC (E.)	Chimie appliquée.
LABROUSTE (H.)	Physique du globe.
RIBAUD (G.)	Physique générale.
VLÈS (F.)	Physique biologique.

Secrétaire : RENARD (A).

69535 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55

THÉORIE DES SURFACES PORTANTES

I.A

THÉORIE DE PRANDTL

PAR

Maurice ROY

INGÉNIEUR AU CORPS DES MINES

AVANT-PROPOS.

Nous avons tenté, dans la présente étude, d'exposer de façon simple les bases de la théorie des surfaces portantes à laquelle on donne généralement en Allemagne le nom de *Tragflügeltheorie* et de faire connaître les résultats acquis jusqu'à ce jour.

Dans la première Partie sont exposées, après un bref rappel des notions d'Hydrodynamique dont il est fait usage, les idées fondamentales de la théorie. Deux problèmes intéressants soulevés par la théorie de Joukowski sont étudiés en annexe.

Dans la deuxième Partie sont décrites les applications d'une forme simplifiée de la théorie telles que les a présentées le Professeur L. Prandtl à la Société scientifique de Göttingen, dans une communication dont nous avons, à quelques modifications de détail près, respecté l'ordre.

En faisant le vœu que ces pages puissent être de quelque utilité pour ceux, aujourd'hui si nombreux, qu'intéresse l'étude technique du problème passionnant de l'Aviation, nous tenons à exprimer ici notre très vive et respectueuse gratitude, pour la bienveillance qu'ils n'ont cessé de nous témoigner, à nos Maîtres, les éminents Professeurs MM. H. Dulac et Émile Jouguet, et au savant mathématicien M. Henri Villat, de l'Université de Strasbourg, à qui l'Aérodynamique est redevable des beaux travaux que l'on sait, et nous faisons hommage à la Mémoire du regretté Colonel Dorand de ce modeste travail d'un jeune ami des questions aérodynamiques.

Dinard, 12 août 1922.

LA

THÉORIE DE PRANDTL

PREMIÈRE PARTIE.

THÉORIE DES SURFACES PORTANTES.

INTRODUCTION.

Origines de la théorie. — La théorie de l'aile portante a été édifiée en Allemagne par le Professeur L. Prandtl, directeur de l'Institut de recherches aérodynamiques de Göttingen, avec la collaboration des ingénieurs attachés à cet établissement. C'est surtout pendant la dernière guerre que cette théorie s'est développée en raison de l'activité déployée pour les essais aérodynamiques et dans le but de fournir à la technique de l'aviation les méthodes de calcul et les formules nécessaires à l'établissement des surfaces portantes des avions.

Cette théorie doit beaucoup aux idées exposées par le physicien anglais Lanchester dès 1894 sur la circulation des vitesses dans les fluides autour des surfaces portantes et les mouvements tourbillonnaires créés dans un fluide par le déplacement de ces surfaces.

L'expression quantitative de la force de sustentation ou portance d'une aile d'envergure infinie dans un fluide parfait a été formulée en 1902 par W.-M. Kutta, en Allemagne, et en 1905 par le Professeur N. Joukowski, en Russie. Ces savants semblent d'ailleurs être parvenus à ce résultat par des voies complètement indépendantes.

Enfin, dès 1904, le Professeur Prandtl, après des études expérimentales sur le mouvement des fluides à faible viscosité, avait constitué une théorie dite des « couches limites » pour soumettre au calcul les mouvements tourbillonnaires

observés. Des études analogues poursuivies en collaboration avec le Professeur Karman conduisaient celui-ci en 1911 à formuler une théorie tourbillonnaire de la résistance à l'avancement.

La théorie de l'aile portante a fait de nombreux emprunts aux travaux que nous venons d'énumérer. Les formules auxquelles elle conduit sont vérifiées par l'expérience de façon satisfaisante et cette concordance, que ses auteurs cherchent à améliorer, suffit à justifier le mérite de ceux-ci et l'intérêt pratique de leur travail.

Rappel des équations de l'Hydrodynamique dans le cas du fluide parfait ou sans viscosité. — Si x, y, z désignent les coordonnées à l'instant t d'une particule du fluide; u, v, w sa vitesse, p sa pression, ρ sa densité au même instant; X, Y, Z les composantes de la force extérieure rapportée à l'unité de volume et agissant sur la particule considérée, les équations du mouvement de cette particule fluide sont

$$(I)\quad \begin{cases} (1)\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ (2)\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ (3)\quad \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial t}, \end{cases}$$

auxquelles s'ajoute la condition de continuité exprimant que le fluide reste continu au cours de son mouvement, c'est-à-dire qu'il ne se produit ni trous, ni failles,

$$(4)\qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Pour déterminer les cinq fonctions inconnues u, v, w, p, ρ des variables x, y, z, t, il faut une relation supplémentaire et, par exemple, l'expression de la densité ρ en fonction de la pression p et de la température θ au cours du mouvement :

$$(5)\qquad \rho = f(p, \theta).$$

En supposant le fluide incompressible et à température constante, cette relation se réduit à

$$(6)\qquad \rho = \text{const.}$$

On démontre que l'on peut, en première approximation, et pour les vitesses intéressant l'Aérodynamique, négliger la compressibilité de l'air.

En considérant donc l'air comme un fluide incompressible et dénué de viscosité, les équations de l'Hydrodynamique prennent la forme

$$(II)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = X - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial u}{\partial t}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = Y - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z} - \dfrac{\partial v}{\partial t}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = Z - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial t}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \rho = \text{const.}, \end{cases}$$

équations qui permettent, connaissant les conditions initiales et les conditions aux limites, la détermination du mouvement d'une particule fluide.

Les variables employées x, y, z, t portent le nom de « variables d'Euler ». On met quelquefois les équations de l'Hydrodynamique sous une autre forme, en utilisant les variables de Lagrange : coordonnées a, b, c de la particule considérée à l'instant initial et temps t. La résolution du problème du mouvement consiste alors à déterminer la trajectoire de chaque particule, on connaît ensuite la vitesse à chaque instant par la dérivation des fonctions

$$x(a, b, c, t), \quad y(a, b, c, t), \quad z(a, b, c, t)$$

par rapport au temps t.

Lorsqu'on emploie les variables d'Euler, on cherche au contraire à déterminer le champ de vitesse et de pression à chaque instant. La trajectoire d'une particule se détermine alors par intégration à partir de sa vitesse.

Nous emploierons uniquement dans ce qui suit les variables d'Euler et supposerons le fluide parfait et incompressible.

Cas du régime permanent. — On dit que le régime est permanent lorsque les fonctions u, v, w, p, ρ sont indépen-

dantes du temps. Les équations du mouvement se simplifient alors et deviennent

$$\text{(III)}\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial x} = \mathrm{X} - u\dfrac{\partial u}{\partial x} - v\dfrac{\partial u}{\partial y} - w\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial y} = \mathrm{Y} - u\dfrac{\partial v}{\partial x} - v\dfrac{\partial v}{\partial y} - w\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial p}{\partial z} = \mathrm{Z} - u\dfrac{\partial w}{\partial x} - v\dfrac{\partial w}{\partial y} - w\dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \\ \rho = \text{const.}, \end{cases}$$

par disparition des termes $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial v}{\partial t}$, $\frac{\partial w}{\partial t}$.

Multiplions la première équation par dx, la seconde par dy, la troisième par dz et ajoutons, il vient

$$\begin{aligned}(7)\qquad \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x}dx + \frac{\partial p}{\partial y}dy + \frac{\partial p}{\partial z}dz\right) &= \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz - u\left(\frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial x}dy + \frac{\partial w}{\partial x}dz\right) \\ &\quad - v\left(\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial y}dz\right) \\ &\quad - w\left(\frac{\partial u}{\partial z}dx + \frac{\partial v}{\partial z}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz\right).\end{aligned}$$

Si l'on veut déterminer la variation de pression le long d'une ligne de courant, trajectoire commune à toutes les particules fluides qui se trouvent sur cette ligne à un instant quelconque, il faut donner aux déplacements dx, dy, dz des valeurs proportionnelles aux projections de la vitesse au point considéré, de façon que

$$dx = u\,dt, \qquad dy = v\,dt, \qquad dz = w\,dt.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (7), il vient

$$\begin{aligned}(8)\qquad \frac{dp}{\rho} &= \mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz \\ &\quad - \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{2}\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{2}\right)dy + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\mathrm{V}^2}{2}\right)dz\right],\end{aligned}$$

en désignant par V la grandeur de la vitesse au point x, y, z.

Supposons en outre que la force extérieure X, Y, Z soit « conservative », c'est-à-dire dépende d'une fonction de forces $U(x, y, z)$,

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \qquad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \qquad Z = \frac{\partial U}{\partial z}.$$

L'équation se simplifie

$$\frac{dp}{\rho} = dU - d\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

ou, en intégrant le long d'une ligne de courant,

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = U + \text{const.} \tag{9}$$

La seule force à distance agissant sur l'air dans les problèmes de l'Aérodynamique est la pesanteur. On peut la négliger et l'équation (9) prend alors la forme simple

$$\frac{p}{\rho} + \frac{V^2}{2} = \text{const.}$$

Cette formule est connue sous le nom de « formule de Bernoulli ».

Rappel des propriétés des champs de vecteurs. — Supposons attaché à chaque point x, y, z d'une région de l'espace un vecteur K issu de ce point, de composantes P, Q, R Cette région constitue un champ de vecteurs.

Supposons en outre que P, Q, R, et leurs dérivées partielles du premier ordre au moins, soient des fonctions déterminées et continues des variables x, y, z.

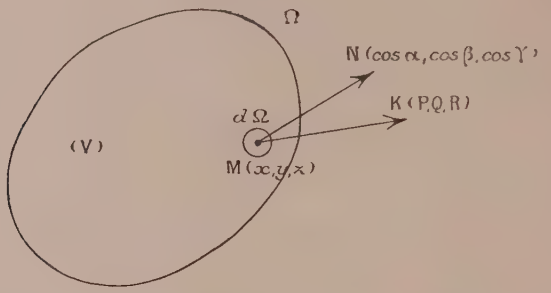
On démontre en Analyse, dans ces conditions, les propositions suivantes :

1° *Théorème d'Ostrogradsky.* — Le flux du vecteur à travers une surface fermée tracée dans le champ est égal à l'intégrale de volume de la divergence du vecteur étendue au volume limité par la surface. On a

$$\int\int_{\Omega} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, d\Omega = \int\int\int_{V} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV.$$

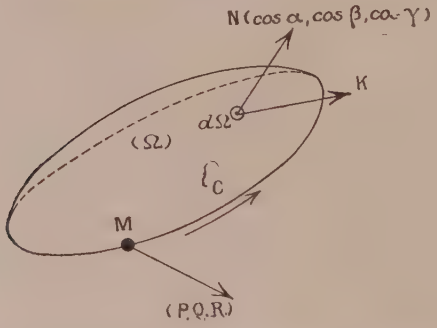
La quantité $\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)$ est appelée divergence du vecteur K au point x, y, z.

Fig. 1.



2° *Théorème de Stokes.* — L'intégrale curviligne du vecteur K prise le long d'un contour fermé C tracé à travers le champ est égale au flux du tourbillon du vecteur considéré à travers une surface continue quelconque s'appuyant sur ce

Fig. 2.



contour (flux évalué à la traversée de la face négative à la face positive). On a

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \int\int_\Omega \left[\cos\alpha\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right) + \cos\beta\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right) + \cos\gamma\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right] d\Omega.$$

La face positive de la surface Ω est celle sur laquelle un

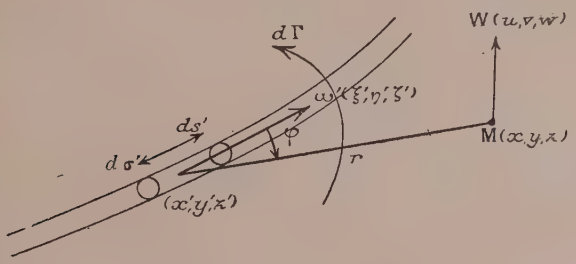
observateur doit se trouver debout pour voir tourner autour de lui dans le sens positif un mobile parcourant le contour C dans le sens de l'intégration. Le tourbillon du vecteur K(P, Q, R) au point x, y, z est le vecteur de composantes

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Champ de vitesses engendré par un filet de tourbillons (1). — Dans un champ de tourbillons on appelle « filet de tourbillons » la zone limitée par les lignes de tourbillons (tangentes en chacun de leur point au tourbillon correspondant) qui s'appuient sur un petit contour fermé.

Si l'on considère un élément de filet tourbillonnaire de longueur ds', de section $d\sigma'$, d'intensité tourbillonnaire $\omega'(\xi', \eta', \zeta')$ situé au point x', y', z', la vitesse (u, v, w) que sa rotation communique à une particule fluide située au point x, y, z est donnée par la loi de Biot et Savart. C'est-à-dire que cette vitesse est identique à celle que prendrait la particule sous l'effet de la rotation ω' de l'élément multipliée par $\frac{d\tau}{4\pi r^3}$, $d\tau$ désignant le volume de l'élément de filet et r la distance du point considéré à cet élément.

Fig. 3.



Cette vitesse W a donc pour valeur

$$W = \frac{\omega' r \sin\varphi \, ds' \, d\sigma'}{4\pi r^3},$$

ou, en désignant par $d\Gamma$ la circulation autour de l'élément

(1) Le fluide est supposé continu et indéfini.

considéré,

$$W = \frac{d\Gamma}{4\pi r^3} r \sin\varphi \, ds',$$

et, pour une ligne de tourbillons, il suffit pour obtenir la vitesse résultante communiquée à une particule située en $M(x, y, z)$ de faire la somme géométrique des vitesses communiquées par chaque élément de la ligne en vertu de la règle précédente.

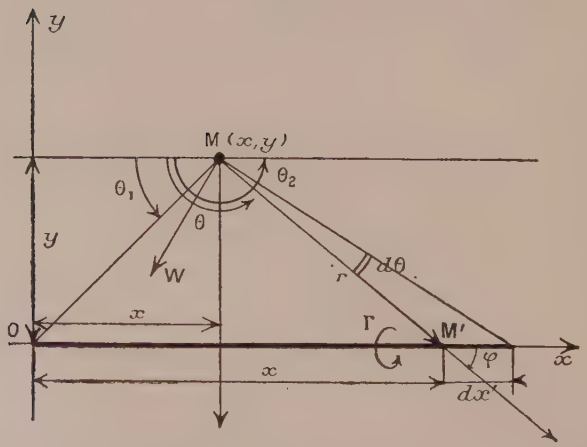
Exemple. — Soit à déterminer la vitesse W engendrée au point (x, y) par un filet rectiligne de circulation Γ issu du point O et dirigé suivant l'axe Ox.

Cette vitesse, normale au plan xy, a pour valeur

$$W = \int_0^\infty \frac{\Gamma}{4\pi r^2} dx' \sin\varphi = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{\theta_1}^{\pi} \frac{r\, d\theta}{r^2}$$

$$= \frac{\Gamma}{4\pi y} \int_{\theta_1}^{\pi} \sin\theta \, d\theta = \frac{\Gamma}{4\pi y} (\cos\theta_1 + 1).$$

Fig. 1.



En particulier, sur l'axe des y,

$$W_0 = \frac{\Gamma}{4\pi y}$$

et à l'infini du côté des x positifs,

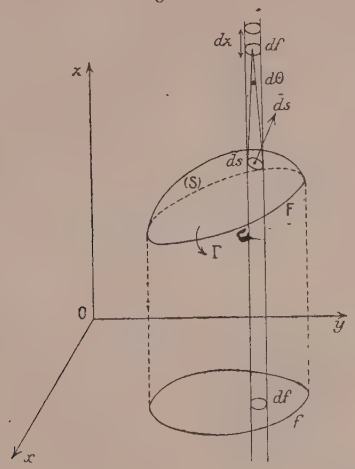
$$W_1 = \frac{\Gamma}{4\pi y} \times 2 = 2 W_0.$$

Analogie électromagnétique. — L'identité de la loi d'action des tourbillons au sein d'un fluide et de celle des actions magnétiques des conducteurs parcourus par un courant montre que la vitesse engendrée par un filet de tourbillons d'intensité Γ en un point est représentée par le même vecteur que l'action magnétique d'un courant d'intensité Γ parcourant le filet dans le sens du tourbillon sur le pôle $+1$ placé au point considéré si l'on choisit des unités telles que le coefficient λ de la loi de Biot et Savart de l'électromagnétisme soit égal à $\frac{1}{4\pi}$.

Le potentiel des vitesses régnant dans le fluide en dehors des tourbillons est identique au potentiel magnétique des courants équivalents.

Quantité de mouvement communiquée à un fluide indéfini par un anneau de tourbillons. — Soit un anneau de tourbillons F, de circulation Γ. Soit une surface S quelconque

Fig. 5.



s'appuyant sur F et limitée à ce contour. Désignons par $\overline{F}$ la résultante de vecteurs $\overline{ds}$ normaux à chaque élément de la surface S et de longueur ds,

$$\overline{F} = \int\int_S \overline{ds}.$$

La quantité de mouvement communiquée par le filet F au fluide indéfini de densité ρ est un vecteur $\overline{W}$ tel que

$$\overline{W} = \rho \Gamma \overline{F}.$$

Pour démontrer cette proposition, prenons un trièdre x, y, z et projetons en f le contour F.

Dans le fluide extérieur à l'anneau F règne un potentiel des vitesses qui, en vertu de l'analogie électromagnétique, a pour expression

$$\Phi = \frac{\Gamma}{4\pi}\Theta,$$

Θ désignant l'angle solide sous lequel est vu du point considéré l'anneau F.

La projection sur l'axe Oz de la quantité de mouvement totale du fluide est, en prenant pour élément de volume $df\,dz$, df désignant un élément de surface du plan des xy,

$$W_z = \int\int\int \rho \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{\partial \Theta}{\partial z} df\,dz.$$

Pour un élément df compris à l'intérieur du contour f, l'intégration suivant Oz donne

$$\frac{\rho\Gamma}{4\pi} df \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \Theta}{\partial z} dz = \frac{\rho\Gamma}{4\pi} df \times 4\pi = \rho\Gamma\, df.$$

Pour un élément df extérieur à ce contour, la même intégration donne zéro. En définitive,

$$W_z = \int\int \rho\Gamma\, df = \rho\Gamma F_z,$$

F_z désignant la projection du vecteur $\overline{F}$ sur le plan des xy.

L'orientation du trièdre étant arbitrairement choisie, on peut écrire la relation vectorielle

$$\overline{W} = \rho\Gamma\overline{F},$$

où le vecteur $\overline{F}$ ne dépend que du contour de l'anneau F.

Supposons maintenant que l'anneau F se déforme avec le temps et entourons-le d'un parallélépipède délimité par des plans parallèles aux plans des coordonnées et tous très éloi-

gnés de l'anneau. Appliquons le théorème des quantités de mouvement, pendant le temps dt, au fluide compris dans l'espace ainsi défini, en projetant sur l'axe des z. Les forces extérieures sont les pressions sur les plans limites parallèles au plan des xy qui s'équilibrent et la force A qui s'exerce sur l'anneau. La variation de la quantité de mouvement de la masse fluide considérée pendant le temps dt lorsque les limites sont rejetées à l'infini a pour valeur

$$d\mathrm{W}_z = \rho\Gamma\, d\mathrm{F}_z,$$

et l'on peut écrire

$$\mathrm{A}\, dt = \rho\Gamma\, d\mathrm{F}_z.$$

Cette proposition est appliquée au paragraphe 23 de la deuxième partie.

Percussions exercées sur un solide immergé. — Dans le mouvement non permanent d'une zone fluide sans tourbillons, on peut écrire, le long d'un tube de courant qui se déplace et se déforme avec le temps,

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \rho\frac{\mathrm{V}^2}{2} + p = f(t),$$

Φ désignant le potentiel des vitesses variable avec le temps. Ceci constitue une généralisation du théorème de Bernoulli où intervient la variation avec le temps du potentiel des vitesses et de la constante caractérisant les particules du filet.

Exerçons une percussion sur un corps immergé dans le fluide et supposons qu'à l'infini amont la pression p_0 ne varie pas. La constante de Bernoulli est donc absolument invariable dans le temps pour chaque filet de courant puisque tous viennent de l'infini amont.

Dans l'expression précédente, en raison de la faible valeur du carré de la vitesse par rapport à l'accélération du fluide et aux différences de pression, on peut négliger $\rho\frac{\mathrm{V}^2}{2}$ et écrire, pendant la durée de la percussion, la relation simplifiée

$$\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t} + p = \text{const.} = p_0,$$

et, en supposant que l'on parte du repos ($\Phi_0 = 0$), l'intégration

donne, en appelant Φ le potentiel à l'instant final τ de la percussion,

$$\rho\Phi = \int_0^\tau (p_0 - p)\, dt.$$

Cette relation est utilisée au paragraphe 13 de la deuxième Partie.

EXPOSÉ DE LA THÉORIE.

I. — Remarques préliminaires.

1. *Paradoxe de d'Alembert.* — Soit un corps baigné par un fluide en mouvement. Si le régime est permanent et si la vitesse est uniforme à l'infini, la résultante de toutes les pressions qui s'exercent sur le corps a, dans la direction de la vitesse du fluide à l'infini, une composante nulle. En d'autres termes, le corps n'offre aucune « résistance » au mouvement du fluide et inversement.

Cette proposition, rigoureuse en elle-même, est en contradiction manifeste avec l'expérience que l'on a du mouvement des fluides et de la résistance provoquée par un solide immergé. Pour mettre en accord la théorie avec les faits, il est nécessaire de modifier l'une des hypothèses faites sur la nature de l'écoulement du fluide autour du solide.

C'est ainsi que Lord Rayleigh et Kirchhoff ont imaginé des surfaces de discontinuité partant de la paroi du corps solide et s'étendant en arrière de ce corps jusqu'à l'infini. La masse fluide comprise entre ces surfaces est alors solidaire du solide et forme le « sillage ». Dans le cas du solide mobile dans un fluide au repos à l'infini amont, le travail dépensé pour vaincre la résistance opposée par le fluide au mouvement du corps se retrouve en énergie cinétique dans le « sillage » entraîné.

2. Mais on peut également échapper au paradoxe de d'Alembert par d'autres hypothèses et notamment en admettant l'existence de tourbillons convenables dans le fluide en mouvement. C'est par une telle hypothèse que la théorie des

surfaces portantes explique la résistance ou traînée de ces surfaces dans un fluide sans viscosité.

3. *Origine de la force portante.* —. Supposons une aile d'envergure infinie, immobile, baignée par un fluide en mouvement permanent, les vitesses dépendant partout d'un potentiel.

Conformément au paradoxe énoncé plus haut, la traînée de cette surface est nulle.

Quant à la composante de la réaction du fluide sur l'aile suivant la normale à la vitesse du fluide à l'infini, composante que nous appellerons « portance » de la surface, sa valeur peut n'être pas nulle.

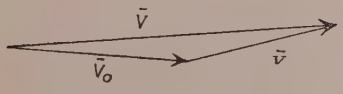
Remarquons en effet que l'espace fluide entourant l'aile forme un espace doublement connexe, la circulation ou intégrale curviligne de la vitesse le long d'une ligne tracée dans le fluide et entourant l'aile peut être différente de zéro. Dans ce cas, le potentiel des vitesses est dit « polytrope » et la portance a une valeur non nulle.

Nous démontrerons plus loin cette proposition que nous admettrons pour l'instant.

Si l'on admet l'existence d'un potentiel des vitesses dans tout le fluide en mouvement, il faut admettre, pour rester d'accord avec l'expérience, que ce potentiel est polytrope, c'est-à-dire que la circulation autour de l'aile est différente de zéro.

La portance résulte en effet d'une dépression dans le fluide en contact avec la face supérieure de l'aile et d'une surpression dans le fluide en contact avec sa face inférieure. Le mouvement du fluide est donc accéléré au-dessus de l'aile, ralenti au-dessous. Regardons la vitesse V d'une particule

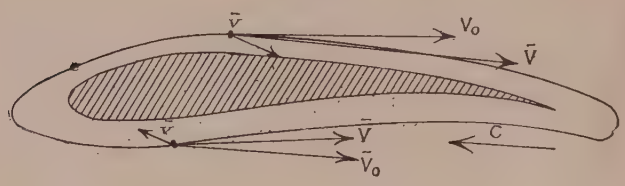
Fig. 6.



comme résultant d'une vitesse principale V_0 ou vitesse du fluide à l'infini et d'une vitesse supplémentaire v. Le vec-

teur $\overline{v}$ est alors dirigé de l'arrière de l'aile vers l'avant au-dessous de l'aile et de l'avant vers l'arrière au-dessus.

Fig. 7.



La circulation est l'intégrale curviligne

$$\Gamma = \int_C \overline{V}\,\overline{ds} \quad (1)$$

ou

$$\Gamma = \int_C \overline{V_0}\,\overline{ds} + \int_C \overline{v}\,\overline{ds}.$$

Or

$$\int_C \overline{V_0}\,\overline{ds} = 0,$$

puisque le vecteur $\overline{V_0}$ est constant en grandeur et en direction.

Donc

$$\Gamma = \int_C \overline{v}\,\overline{ds},$$

intégrale qui est manifestement non nulle en vertu de la remarque que nous venons de faire au sujet de la vitesse $\overline{v}$.

La pression étant liée à la vitesse dans tout le fluide par la relation

$$p + \rho\frac{V^2}{2} = p_0 + \rho\frac{V_0^2}{2} = \text{const.}$$

et la vitesse V possédant en certains points une valeur supérieure à V_0, on peut se demander si l'hypothèse du contournement de l'aile par le courant sans formation de « sillage » n'entraîne pas l'existence de pressions négatives.

---

(1) La notation $\overline{a}\cdot\overline{b}$ désigne le produit géométrique du vecteur $\overline{a}$ par le vecteur $\overline{b}$:

$$\overline{a}\cdot\overline{b} = a.b\cos(\overline{a},\overline{b}).$$

Dans la théorie de l'écoulement avec « sillage » il faut, pour échapper à l'impossibilité d'un régime permanent stable avec des pressions négatives dans le fluide, admettre que les dimensions transversales du sillage vont en croissant avec l'éloignement de l'obstacle (paradoxe de M. Brillouin).

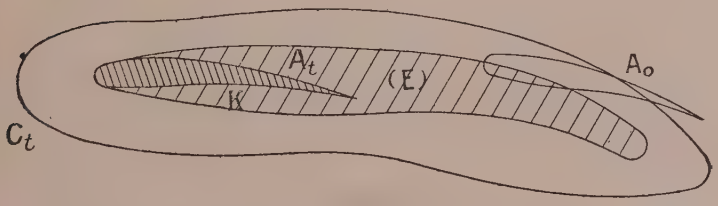
En fait, en appliquant l'hypothèse de l'écoulement sans sillage, pour les vitesses intéressant l'aviation et dans l'atmosphère, à des profils analogues à ceux des ailes Joukowski, l'existence de pressions négatives n'est pas à craindre.

4. *Comment se produit la circulation autour de l'aile.* — Considérons toujours une aile d'envergure infinie et supposons qu'on la mette en mouvement sans variation brusque de vitesse dans le fluide immobile, en partant du repos à l'instant zéro.

A l'instant t, les particules fluides qui ont été en contact avec l'aile à un instant quelconque de l'intervalle $o - t$ occupent une portion finie et continue de l'Espace (E).

Soit C_t une ligne tracée dans le fluide à l'instant t et entourant la région (E) ou région « balayée » par l'aile. Soit d'autre part K le contour de l'aile (*fig.* 8).

Fig. 8.



Les particules situées sur C_t, à l'instant t, forment, à l'instant initial, une ligne fermée et cette courbe se déforme progressivement au cours de l'intervalle $o - t$ sans qu'aucun de ses points vienne jamais en contact avec l'aile.

Les particules de la ligne fluide considérée étant incompressibles, dénuées de viscosité et n'étant, d'autre part, soumises à aucune force extérieure, la circulation reste

constante sur cette ligne, donc nulle, puisque à l'instant initial toutes les vitesses sont nulles.

Désignons par Σ l'aire comprise entre les contours C_t et K à l'instant t, par $\overline{\omega}$ le tourbillon du champ de vitesses dans cette région. Le théorème de Stokes donne la relation

$$\int_{C_t} \overline{V}\,\overline{ds} + \int_{K} \overline{V}\,\overline{ds} = \int\int_{\Sigma} \omega\, d\sigma.$$

Et comme

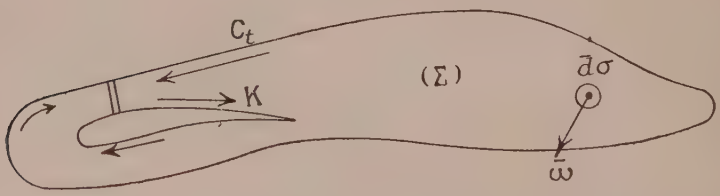
$$\int_{C_t} \overline{V}\,\overline{ds} = 0,$$

on a (*fig.* 9)

$$\int\int_{\Sigma} \omega\, d\sigma = \int_{K} \overline{V}\,\overline{ds} = \Gamma \neq 0.$$

Il faut donc admettre, pour expliquer la production de la circulation autour de l'aile, l'existence de tourbillons dans le fluide pendant la période du régime varié.

Fig. 9.



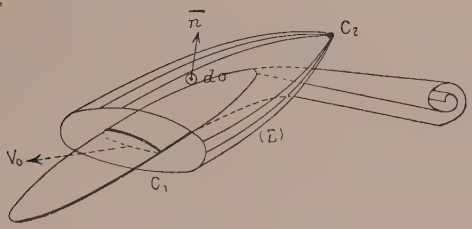
Dans le cas de l'aile d'envergure finie, si l'on attribue, comme dans le cas précédent, la portance de la surface à la circulation des vitesses autour de celle-ci, il faut admettre l'existence de tourbillons dans le fluide, même en régime permanent.

Soit, en effet, une aile A d'envergure finie en mouvement dans un fluide, le régime étant permanent (*fig.* 10).

Considérons à un instant déterminé une ligne C_1 entourant l'aile dans sa portion médiane où l'on supposera, par analogie avec l'aile infiniment étendue, qu'il existe un potentiel polytrope des vitesses. La circulation le long de C_1 est Γ_1 différente de zéro. En déplaçant cette ligne le long de l'aile, on peut lui faire franchir l'extrémité de l'aile et, en la défor-

mant, la réduire à un point C_2. Dans cette nouvelle position, la circulation Γ_2 est évidemment nulle. Soit Σ une surface

Fig. 10.



qui s'appuie sur C_1 et passe par le point C_2, on a

$$\int_{C_1} \overline{V}\,\overline{ds} + \int_{C_2} \overline{V}\,\overline{ds} = \int\int_{\Sigma} \overline{n}\,\overline{\omega}\,d\sigma.$$

Or

$$\int_{C_2} \overline{V}\,\overline{ds} = 0.$$

Donc

$$\int\int_{\Sigma} \overline{n}\,\overline{\omega}\,d\sigma = \int_{C_1} \overline{V}\,\overline{ds} = \Gamma_1 \neq 0,$$

et l'on voit que, dans la déformation que l'on a fait subir au circuit d'intégration, celui-ci a coupé des lignes de tourbillons.

5. *Origine des tourbillons.* — Dans un fluide incompressible et sans viscosité, mis en mouvement sans choc à partir du repos, les particules ne sauraient acquérir de rotation ou, l'ayant acquise, éprouver une variation de leur rotation, tant qu'elles ne sont soumises qu'à des forces extérieures conservatives, c'est-à-dire dépendant d'une fonction de forces.

L'action de contact entre le fluide et la surface extérieure de l'aile, seule force extérieure agissant sur le fluide (la pesanteur étant négligée), étant une force non conservative, il en résulte que, seules, les particules du fluide qui ont été à un moment quelconque en contact avec la surface de l'aile peuvent à partir de ce moment posséder une rotation non nulle, rotation qui reste constante en vertu du théorème sur

la conservation des tourbillons. Quant aux autres particules, elles ne peuvent être le siège d'un tourbillon, et, par suite, sont soumises au cours de leur mouvement à un potentiel des vitesses.

II. — Théorie du profil. — Aile d'envergure infinie.

6. Nous supposerons que l'aile est mise en mouvement sans choc à partir du repos et nous envisagerons le mouvement du fluide par rapport à l'aile.

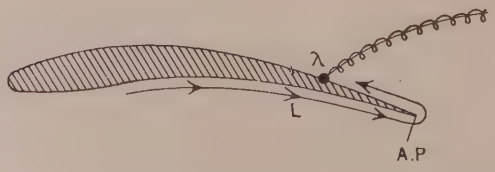
Avant la mise en mouvement, les vitesses sont partout nulles. Elles dépendent donc d'un potentiel des vitesses. Après la mise en mouvement, cette propriété subsiste sauf pour les particules qui ont été en contact avec la surface de l'aile où se manifeste une action de contact qui communique à ces particules un tourbillon.

Dans le mouvement du fluide, on peut donc dire qu'il y a un potentiel des vitesses, sauf en certains points. Ces points forment une surface qui part de l'aile le long d'une ligne déterminée.

Quelle est cette ligne?

Pour les profils d'aile utilisés dans la technique de l'avion et les incidences faibles des régimes de vol, on peut admettre qu'il y a écoulement tout autour du profil de l'aile sans formation de sillage ou eau morte, masse fluide qui serait solidaire de l'aile au cours du mouvement. Par suite, la surface de tourbillons émanant de l'aile sépare deux portions en mouvement du fluide et, de chaque côté de la ligne de

Fig. 11.



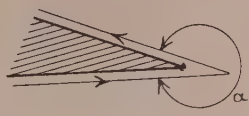
départ λ, le fluide s'écoule le long du contour du profil de façon à converger vers cette ligne λ (*fig.* 11).

Cette ligne forme alors ce qu'on appelle une « ligne de

confluence » pour le courant divisé par l'arête antérieure. Le Professeur Prandtl justifie cette représentation du courant fluide en regardant le fluide parfait comme la limite d'un fluide à viscosité très faible dans lequel les hypothèses de la théorie des couches limites conduisent à considérer au contact de l'aile deux couches tourbillonnaires d'épaisseur très faible qui se confondent à l'aval en séparant toujours les mêmes masses fluides. A la limite, les couches latérales disparaissent, mais celle qui provient de leur réunion persiste avec une épaisseur infiniment petite et prend naissance à la surface de l'aile le long de la ligne de confluence.

Cette ligne de confluence coïncide nécessairement avec l'arête postérieure, car si cette ligne λ se trouvait disposée ailleurs sur la surface de l'aile, comme l'indique la figure 11 par exemple, une ligne de courant telle que L devrait nécessairement dans l'écoulement correspondant éprouver une variation brusque de direction au droit de l'arête postérieure AP qui est toujours, dans la pratique, une arête vive et « saillante » dans le fluide, l'angle dièdre formé par les

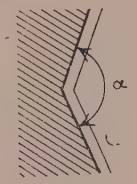
Fig. 12.



Arête « saillante » $\alpha > \pi$.

faces de l'aile et mesuré dans le fluide étant supérieur à π. Or, au contournement d'un obstacle présentant ce caractère,

Fig. 13.

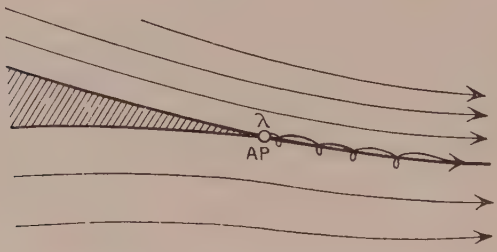


Arête « en retrait » $\alpha < \pi$.

une particule fluide dont le mouvement est régi par un potentiel des vitesses doit posséder au droit de l'arête une vitesse infinie.

Pour éviter cette conséquence, aucune grandeur physique ne pouvant atteindre une valeur infiniment grande, il faut donc admettre que l'arête postérieure est elle-même la ligne de confluence d'où part la surface tourbillonnaire qui sépare les deux parties du courant. Cette proposition est considérée

Fig. 14.



comme un axiome de l'Hydrodynamique par Prandtl pour les profils d'aile courants dans les conditions habituelles de leur utilisation.

La surface tourbillonnaire qui prend naissance le long de l'arête postérieure de l'aile n'existe que pendant la période du régime varié. Lorsque le mouvement atteint l'état de régime permanent, après un temps infini, cette surface a disparu, les tourbillons initialement formés, les plus importants, ayant été entraînés infiniment loin en arrière de l'aile, suivis de tous les autres tourbillons qui ont pris naissance ultérieurement avec une intensité décroissante, à mesure que l'état du mouvement tendait vers le régime permanent.

7. *Cas du régime permanent.* — Soit une ligne fluide ABCD formée de deux tronçons de lignes de courant L_1 et L_2

Fig. 15.

reliés par deux lignes quelconques AB et CD tracées dans le fluide en amont et en aval de l'aile.

Après un intervalle de temps *dt*, cette ligne fluide est

venue en A′ B′ C′ D′, et si les lignes L_1 et L_2 ne sont pas au voisinage immédiat de l'aile, la circulation est restée constante sur la ligne fluide considérée. On a donc, puisque le régime est permanent,

$$\int_{A'B'C'D'} \overline{V}\,\overline{ds} - \int_{AEC1} \overline{V}\,\overline{ds} = \int_{ABB'A'} \overline{V}\,\overline{ds} + \int_{CDD'C'} \overline{V}\,\overline{ds} = 0.$$

Or, en appliquant aux aires fluides ABB′A′ et CDC′D′ le théorème de Stokes, on voit que la circulation autour de la première aire est nulle puisqu'il n'y a pas de tourbillons à l'amont de l'aile et que, par suite, il n'y a pas de tourbillons dans la seconde, puisque sa circulation est nulle.

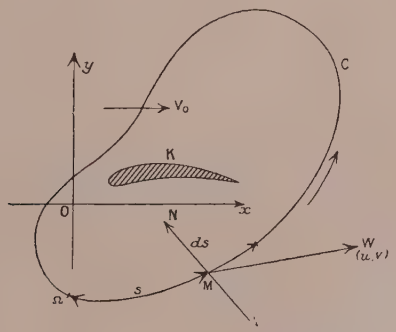
En choisissant convenablement L_1, L_2 et la ligne CD, on peut décomposer toute la région aval du plan en éléments d'aire où le tourbillon est nul.

Par conséquent, il n'existe plus de tourbillons dans le fluide lorsque le mouvement a atteint l'état de régime permanent et il règne alors dans l'espace fluide doublement connexe un potentiel des vitesses polytrope.

Soient K le contour de l'aile immergée dans le fluide animé à l'infini de la vitesse V_0, Ox et Oy les axes de coordonnées, Ox étant parallèle à V_0.

Soient C un contour quelconque entourant l'aile et tracé

Fig. 16.



dans le plan xy et ds un élément (dx, dy) pris sur ce contour et orienté positivement.

Evaluons la masse de fluide qui traverse cet élément pour pénétrer dans le contour C pendant le temps dt.

Cette masse élémentaire a pour valeur :

$$\begin{aligned} dm &= \rho\, ds\, w \cos(w, \mathrm{MN})\, dt \\ &= \rho\, ds\, dt [u \cos(u, \mathrm{MN}) + v \cos(v, \mathrm{MN})] \\ &= \rho\, ds\, dt [u \cos(v, ds) - v \cos(u, ds)] \\ &= \rho\, ds\, dt \left[u \frac{dy}{ds} - v \frac{dx}{ds} \right]. \end{aligned}$$

Appliquons pendant le temps dt le théorème des quantités de mouvement à la masse fluide comprise entre les cylindres K et C et deux plans parallèles au plan des xy et dont l'écartement mutuel soit égal à l'unité.

a. Évaluons la quantité de mouvement acquise pendant le temps dt. Cette quantité a pour valeur, en projetant suivant Ox, puis suivant Oy :

$$\begin{aligned} \mathrm{QM}_x = \int_C u\, dm &= \rho\, dt \int_C u [u\, dy - v\, dx] \\ &= \rho\, dt \int_C [(u^2 + v^2)\, dy - v(u\, dx + v\, dy)], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{QM}_y = \int_C v\, dm &= \rho\, dt \int_C v [u\, dy - v\, dx] \\ &= \rho\, dt \int_C [u(u\, dx + v\, dy) - (u^2 + v^2)\, dx], \end{aligned}$$

$u\, dx + v\, dy$ représente l'élément $d\gamma$ de circulation le long de ds, dans le sens positif. On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{QM}_x &= \rho\, dt \int_C (w^2)\, dy - \rho\, dt \int_C v\, d\gamma \\ &= \rho\, dt \int_C w^2\, dy - dt \rho (v\gamma)_\Omega^\Omega + \rho\, dt \int_C \gamma\, dv, \end{aligned}$$

$$\mathrm{QM}_y = \rho\, dt [u\gamma]_\Omega^\Omega - \rho\, dt \int_C \gamma\, du - \rho\, dt \int_C w^2\, dx,$$

γ désignant l'intégrale curviligne de la vitesse, de l'origine Ω prise sur le contour C au point courant M.

b. Evaluons maintenant la somme des impulsions des forces extérieures pendant le temps dt et suivant les mêmes axes.

Ces forces comprennent :

1° La réaction de l'aile sur le fluide, de composantes X (opposée à la traînée) et Y (opposée à la portance).

2° Les pressions du fluide extérieur sur le cylindre C.

On a donc, suivant Ox,

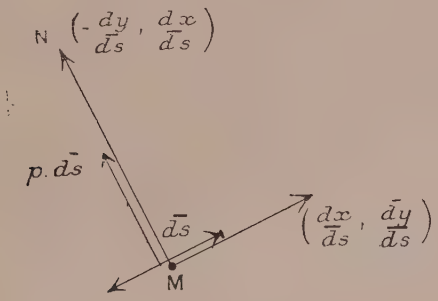
$$X\,dt + \int_C p\,ds\cos(MN, Ox) = X\,dt - dt\int_C p\,dy;$$

suivant Oy,

$$Y\,dt + \int_C p\,ds\cos(MN, Oy) = Y\,dt + dt\int_C p\,dx.$$

En égalant ces impulsions aux variations des quantités de

Fig. 17.



mouvement évaluées suivant les mêmes axes, on obtient le système

$$(1)\qquad X = \int_C (p + \rho w^2)\,dy - \rho(v\gamma)_\Omega^\Omega + \rho\int_C \gamma\,dv,$$

$$(2)\qquad Y = \rho[u\gamma]_\Omega^\Omega - \rho\int_C \gamma\,du - \int_C (p + \rho w^2)\,dx.$$

Supposons que tous les points du contour C soient infiniment éloignés du contour K de l'aile. Puisqu'il n'y a pas de tourbillons, le théorème de Bernoulli s'applique à tout le fluide et, la vitesse V_0 étant constante à l'infini, la pression p_0 y est également constante. On a donc, sur tout le contour C :

$$u = V_0 = \text{const.}, \qquad du = 0,$$
$$v = 0, \qquad dv = 0,$$
$$p = p_0.$$

Les équations (1) et (2) deviennent :

$$X = 0, \tag{3}$$

$$Y = \rho V_0 \Gamma, \tag{4}$$

où Γ est la circulation, non nulle puisque le potentiel est polytrope, le long du contour C, ou, puisqu'il n'y a pas de tourbillons, le long d'un contour quelconque n'entourant qu'une fois K, en particulier le long du contour K lui-même.

La relation (4) ou formule de Kutta-Joukowski peut s'énoncer de la manière suivante :

Théorème. — Lorsqu'un courant, dont la vitesse à l'infini est V_0, s'écoule le long d'un contour et que la circulation le long de ce contour est égale à Γ, la résultante des pressions du fluide sur le contour, par unité de longueur suivant l'envergure, est égale au produit du vecteur V_0 représentant la vitesse du courant à l'infini par la circulation Γ et par la densité ρ du fluide. La direction de la force s'obtient en faisant tourner de 90° le vecteur V_0 dans le sens inverse de celui de la circulation.

La question se pose alors de déterminer la circulation autour d'un profil en fonction de sa forme et de son angle d'attaque pour connaître, par le théorème précédent, sa portance dans les mêmes conditions.

Désignons par φ le potentiel des vitesses, fonction polytrope qui régit le mouvement de tout le fluide. Cette fonction, en vertu de l'équation de continuité

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

vérifie l'équation dite de Laplace

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = \Delta \varphi = 0.$$

Mais l'équation de continuité exprime aussi que

$$-v\,dx + u\,dy$$

est une différentielle exacte; soit $d\psi$ cette différentielle. On peut poser

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x};$$

la fonction ψ est la *current function* de Stokes ou fonction de courant. Les lignes de courant ont, en effet, pour équation

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v}, \qquad \text{ou} \qquad d\psi = 0, \qquad \text{ou} \qquad \psi = \text{const.}$$

La fonction de courant ψ vérifie, comme le potentiel φ, l'équation de Laplace

$$\Delta\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = -\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} = 0.$$

Dans le cas du courant à deux dimensions dépendant d'un potentiel, on peut donc dire qu'il existe deux fonctions φ et ψ, telles que les lignes $\varphi = \text{const.}$ soient les lignes équipotentielles, et que les lignes $\psi = \text{const.}$ soient les lignes de courant. Ces systèmes de lignes forment un réseau orthogonal. Les fonctions φ et ψ sont harmoniques conjuguées, $\varphi + i\psi$ est une fonction analytique de la variable complexe

$$z = x + iy.$$

Rappelons une propriété intéressante d'une fonction analytique.

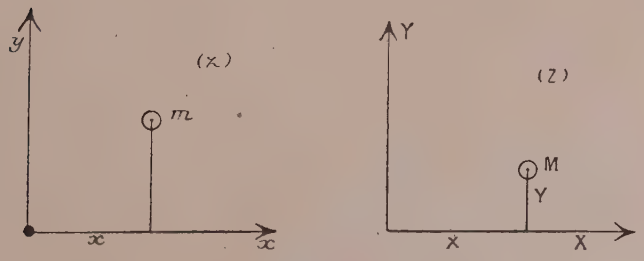
Si l'on pose

$$(a) \qquad Z = f(x + iy) = f(z),$$

la fonction Z peut s'écrire

$$(b) \qquad Z = X(x, y) + iY(x, y),$$

Fig. 18.



les fonctions X et Y étant réelles. A un point $m\,(x, y)$ du plan de la variable z, les relations précédentes font corres-

pondre un ou plusieurs points M(X, Y) du plan Z et inversement. Considérons en particulier un point m_0 où la dérivée $\frac{dZ}{dz}$ n'est ni nulle, ni infinie et un des points correspondants que nous appellerons M_0; si m se déplace de manière continue en partant de m_0 dans une aire assez petite (a) entourant m_0, il existera un point unique M partant de M_0 et décrivant une fois et une seule une aire (A) entourant M_0 [propriété de la fonction analytique de z :

$$Z = f(z)].$$

La transformation ponctuelle fait alors correspondre point par point les aires (a) et (A) en ce sens qu'à tout point m pris dans (a) correspond un seul point M de (A) et réciproquement. De plus, la représentation est conforme.

Si l'on connaît une forme d'écoulement dans le plan de la variable complexe $Z = x + iy$, on peut en déduire une forme correspondante d'écoulement dans le plan d'une autre variable complexe

$$Z = X + iY$$

par la substitution

$$Z = f(z),$$

f étant une fonction analytique.

On sait former le potentiel d'un courant plan ayant une vitesse constante en grandeur et direction à l'infini, contournant un cylindre circulaire indéfini dont les génératrices sont normales au plan du courant et animé d'une circulation déterminée autour de cet obstacle.

Soit φ ce potentiel, ψ la fonction de courant.

Posons

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = g(x + iy) = g(z),$$

g est, comme on l'a vu, une fonction analytique de z.

Choisissons une transformation analytique

$$Z = f(z) = X(x, y) + iY(x, y)$$

et réciproquement

$$z = h(Z),$$

telle que le contour de l'obstacle du plan (z) soit transformé

dans le plan (Z) en un contour déterminé et qu'à l'infini on ait partout

$$Z = \lambda z,$$

λ étant une grandeur réelle, finie et déterminée.

La substitution de Z à z dans la fonction analytique $g(z)$ donne une fonction G(Z) analytique qui détermine le courant autour de l'obstacle considéré dans le plan de la variable Z :

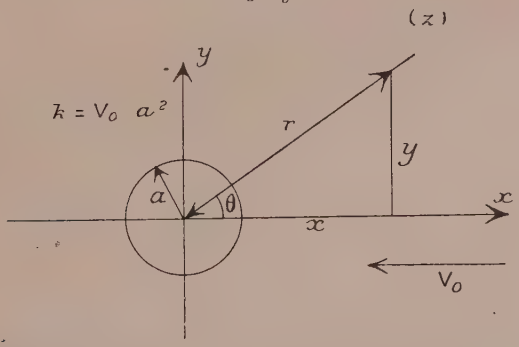
$$G(Z) = G(X + iY) = \varphi(X, Y) + i\psi(X, Y),$$

φ et ψ sont le potentiel et la fonction de courant qui caractérisent ce nouvel écoulement.

Donnons un exemple de cette méthode excessivement féconde dans le domaine des applications :

1° Courant plan uniforme à l'infini et doué de circulation autour d'un cylindre circulaire.

Fig. 19.



Prenons la fonction suivante de la variable complexe Z :

$$F_1 = -V_0 z - \frac{k}{z},$$

qui peut s'écrire

$$F_1 = -V_0 x - k\frac{x}{r^2} - i\left(V_0 y - \frac{ky}{r^2}\right),$$

d'où

$$\varphi_1 = -V_0 x - k\frac{x}{r^2},$$

$$\psi_1 = -V_0 y + k\frac{y}{r^2}.$$

Ce courant plan à potentiel est bien uniforme à l'infini, mais ne possède pas de circulation. Superposons-lui un courant doué de la seconde propriété et de vitesse nulle à l'infini. Il suffit de poser

$$F_2 = \frac{ki}{\pi} \log \frac{z}{a},$$

qui peut s'écrire

$$F_2 = -\frac{k\theta}{\pi} + \frac{ki}{\pi} \log \frac{r}{a},$$

d'où

$$\varphi_2 = -\frac{k\theta}{\pi},$$

$$\psi_2 = \frac{k}{\pi} \log \frac{r}{a}.$$

Le courant obtenu par la superposition des deux courants précédents et défini par

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = -V_0 x - \frac{kx}{r^2} - \frac{k\theta}{\pi},$$

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = -V_0 y + \frac{ky}{r^2} + \frac{k\theta}{\pi} \log \frac{r}{a},$$

satisfait aux conditions du problème.

2° Choisissons la substitution

$$Z = f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{a^2}{z}\right),$$

où f est bien une fonction analytique de la variable complexe z.

A l'infini de z

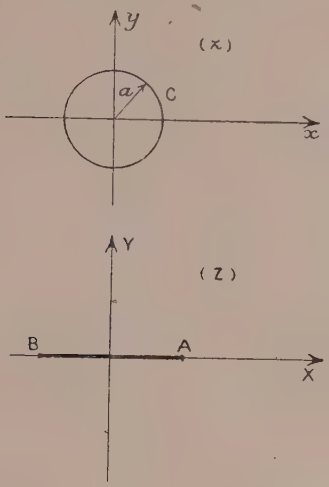
$$Z = \frac{1}{2} z.$$

La région occupée par le fluide dans le plan z, c'est-à-dire tout le plan z en dehors du cercle de rayon a, devient dans le plan Z tout l'espace indéfini autour du segment BA, en lequel la substitution opérée a transformé le cercle C.

La même substitution, opérée dans les fonctions φ et ψ du courant déterminé ci-dessus, donnera les fonctions correspondantes pour l'écoulement autour du segment BA. Du courant à potentiel autour d'un cylindre, la méthode de représentation conforme permet de passer directement au courant autour d'une aile plane d'envergure infinie.

Nous ne développerons pas davantage cette théorie du mouvement permanent à deux dimensions d'un fluide autour

Fig. 20.



d'un profil d'aile, théorie à laquelle les travaux de Joukowski et Tchapliguine en Russie ont fourni une large et remarquable contribution.

8. *Absence de traînée. Adaptation de la théorie aux fluides réels. Résistance de profil.* — Pour l'aile d'envergure infinie, le régime permanent étant établi, les réactions du fluide dénué de viscosité sur l'aile ne donnent lieu qu'à une portance. La traînée de la surface est nulle.

Comment donc mettre d'accord la théorie de ces surfaces avec l'expérience? En faisant intervenir la viscosité qui distingue les fluides réels, ceux sur lesquels nous expérimentons, des fluides parfaits de la théorie.

On peut réaliser approximativement un mouvement à deux dimensions autour d'un profil en expérimentant, dans un tunnel par exemple, un tronçon d'aile à profil constant placé entre deux cloisons parallèles à l'axe général du courant. Dans une telle expérience la traînée mesurée, admise comme représentant la traînée qu'éprouverait l'aile dans un courant réellement à deux dimensions du fluide réel des

essais, représente l'influence de la viscosité très faible du fluide ou, suivant les expressions employées par les auteurs, du frottement superficiel contre la surface, de la Skin-friction, de l'Hautreibung. Cette résistance est appelée « résistance de profil ».

C'est parce que la viscosité des fluides réels est très faible qu'elle peut être négligée en première approximation dans la théorie du mouvement de ces fluides.

Admettons que la viscosité soit suffisamment faible pour qu'elle soit réellement négligeable partout où n'interviennent pas, soit une variation très rapide de la vitesse, soit une influence cumulative de la viscosité.

Admettons d'autre part, hypothèse qui ne fut pas toujours adoptée autrefois unanimement par les théoriciens de l'Hydrodynamique et qui paraît aujourd'hui justifiée, que dans un fluide visqueux les particules au contact d'un solide immergé adhèrent à ce solide. Supposons enfin qu'à une certaine distance de l'obstacle, le mouvement soit sensiblement ce qu'il serait pour le fluide parfait dans les mêmes conditions. Il faut alors regarder l'obstacle comme environné par une couche mince de fluide à l'intérieur de laquelle la vitesse croît très rapidement de zéro au contact de l'obstacle à la valeur de la vitesse du courant général à la périphérie de la couche. Par suite de cette variation rapide de vitesse, la viscosité intervient de façon sensible et le travail nécessaire pour communiquer aux tourbillons de cette couche l'énergie cinétique qu'ils possèdent, énergie ultérieurement dégradée en chaleur dans la masse fluide, représente le travail résistant de la traînée de la surface. Par contre, la portance ne se trouve pas altérée de façon notable par l'existence de cette couche tourbillonnaire enveloppant le corps puisque, à la périphérie de la couche, les pressions ont, comme les vitesses, sensiblement les mêmes valeurs que pour un fluide parfait. Ces pressions se transmettant presque sans altération à travers la couche à la surface du corps, il en est de même sur cette surface.

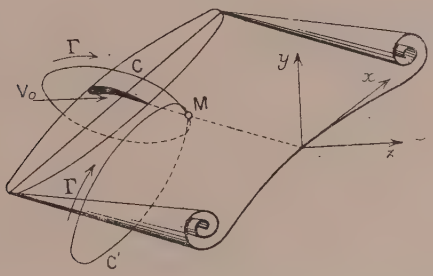
Bien entendu, comme la théorie même des surfaces portantes, les considérations précédentes ne sont valables que dans le domaine des formes de profils et des angles d'attaque usuels.

III. — Aile d'envergure finie. — Cas du régime permanent.

9. Nous avons démontré plus haut que dans ce cas une nappe de tourbillons existe dans le fluide. Cette nappe prend naissance à l'arête postérieure et sur les bords latéraux de l'aile. Le courant est alors à trois dimensions, sauf dans le plan de symétrie de l'aile. Si l'on appelle « problème plan » celui de l'écoulement autour d'une aile d'envergure infinie, on peut appeler « problème spatial » celui qui concerne l'aile d'envergure limitée.

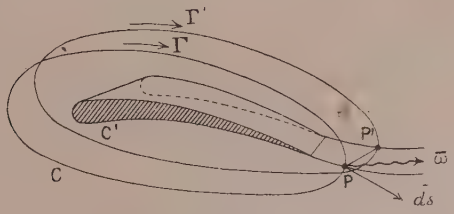
L'intensité tourbillonnaire dans cette nappe est telle que le flux de tourbillons, à travers un circuit fermé quelconque

Fig. 21.



entourant une seule fois l'aile ou la nappe et traversant celle-ci en un point M du plan de symétrie, soit égal à la circulation autour de l'aile et dans son plan de symétrie.

Fig. 22.



Soit un contour C passant par un point P de la nappe entourant une seule fois l'aile et parallèle à son plan de symétrie. Soit un second contour C′ doué des mêmes propriétés et déduit du premier par une translation infiniment petite. Si l'on désigne par $\overline{ds}$ le vecteur normal à l'élément

de surface découpé dans la nappe par la translation du contour et égal en grandeur à l'aire de cette section, par $\overline{\omega}$ le tourbillon situé dans la nappe au point P, par Γ et Γ' les circulations sur C et C', le théorème de Stokes appliqué à une surface cylindrique s'appuyant sur C, C' et limitée à ces contours, donne

$$\Gamma' - \Gamma = \overline{\omega}\,\overline{ds},$$

$$d\Gamma = \overline{\omega}\, e \frac{\overline{ds}}{e},$$

e désignant l'épaisseur infiniment petite de la nappe au point considéré. C'est l'équation différentielle qui définit le tourbillon au point P.

La variation de la circulation, et par suite de la portance, suivant l'envergure étant surtout sensible aux extrémités latérales de l'aile, la nappe tourbillonnaire est surtout intense dans les régions correspondantes. Aussi, les tourbillons qui s'échappent des extrémités de l'aile ou tourbillons marginaux (« tip vortices » de Lanchester) ont-ils une influence prépondérante. L'existence de ces tourbillons entraîne une conséquence importante.

La nappe s'étendant jusqu'à l'infini à l'arrière de l'aile, il en résulte que la vitesse du courant à l'infini n'est pas uniforme. Le théorème de Cissoti, qui établit la nullité de la résistance au mouvement d'un solide immergé dans le cas où cette vitesse est uniforme, ne s'applique donc pas ici.

Les tourbillons marginaux permettent donc d'échapper, pour un fluide sans viscosité et un obstacle sans sillage indéfini, au paradoxe de d'Alembert.

La résistance au mouvement dont ils sont la cause est appelée « résistance induite ».

A cette résistance s'ajoute, dans le cas d'un fluide réel à viscosité très faible, un terme relativement peu important correspondant à l'effet de la viscosité et du frottement au contact de l'aile et du fluide comme nous l'avons indiqué pour le cas de l'aile d'envergure infinie où cette « résistance de profil » existe seule.

10. *Aile fluide.* — Si l'on se donne une aile dont la forme et la présentation au courant sont déterminées et si l'on fixe

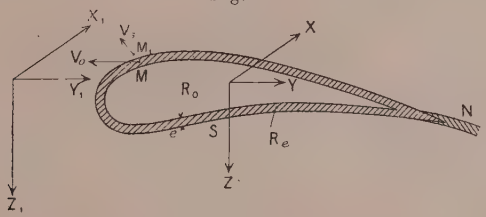
la valeur V_0 de la vitesse de cette aile dans le fluide primitivement immobile, la distribution des vitesses dans l'écoulement réel est parfaitement déterminée. Normalement, il doit en être de même pour le courant théorique. Admettons dans le cas général ce résultat qui sera démontré plus loin pour le cas particulier du problème plan.

Dans les mêmes conditions, et grâce aux hypothèses de la théorie, il faut regarder la forme et la distribution de la nappe de tourbillons libres N qui accompagne l'aile comme déterminées. Supposant ces éléments connus, on pourrait alors passer du champ de ces tourbillons au champ de vitesses correspondant dans le fluide indéfini en tenant compte de la présence de l'obstacle immergé.

Pour éviter les difficultés mathématiques introduites par la présence de l'obstacle solide, Prandtl réalise la continuité du fluide dans tout l'espace en substituant à l'aile solide une « aile fluide ».

Imaginons que l'espace R limité par la surface extérieure S

Fig. 23.



de l'aile ou « espace portant » soit formé d'une zone intérieure R_0 de fluide en repos où règne la pression

$$q = p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2}$$

entourée d'une couche R_e de fluide d'épaisseur e très faible animée d'un mouvement tourbillonnaire tel que la relation de Bernoulli

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} \qquad (1)$$

y soit vérifiée et que le mouvement du fluide ambiant soit le même que dans l'écoulement autour de l'aile solide.

Les tourbillons de la couche R_e sont astreints à un mouvement déterminé par celui de la surface S. D'autre part, le régime étant permanent, on peut dire qu'ils sont « liés » à cette surface et cette liaison exige l'application d'une force en général non conservative.

Soient k_x, k_y, k_z les composantes de cette force rapportée à l'unité de volume du fluide, les équations de l'Hydrodynamique donnent, en désignant par γ_x, γ_y, γ_z les composantes du « tourbillon lié » de la couche R_e

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p+\rho\,\frac{u^2+v^2+w^2}{2}\right)=k_x+\rho(\gamma_z v-\gamma_y w), \qquad \ldots.$$

En tenant compte de l'hypothèse exprimée par la relation (1) ces équations deviennent

$$k_x=\rho(\gamma_y w-\gamma_z v), \qquad \ldots \tag{2}$$

et expriment que la force $\overline{k}$ est égale au produit vectoriel des vecteurs $\overline{\gamma}$ et $\overline{V}$ multiplié par la densité ρ du fluide. Cette relation remarquable subsiste quelle que soit la valeur de l'épaisseur e très faible de la couche R_e.

Soit $V_S(u_S, v_S, w_S)$ la vitesse du fluide du courant extérieur en un point de la surface S. Soient, en outre, α, β, γ les cosinus directeurs de la normale intéricure à S en ce point. Nous pouvons décomposer la surface S en éléments assez petits pour que l'on puisse les considérer comme plans et la vitesse V_S comme constante dans toute leur étendue. Nous pouvons en outre choisir l'épaisseur e de la couche de passage de façon qu'elle soit très petite, même vis-à-vis de ces éléments. Ce mode de raisonnement emprunté à Henri Poincaré montre que le tourbillon lié qui assure le passage de la vitesse o à la vitesse V_S à travers la couche d'épaisseur e, où l'on peut supposer la répartition du tourbillon uniforme, a pour composantes

$$2e\gamma_x=(\gamma v_S-\beta w_S), \qquad \ldots. \tag{3}$$

Ces expressions montrent que cè tourbillon a une valeur très grande, qu'il est situé dans le plan tangent à S et normal à la vitesse (u_S, v_S, w_S). En outre, sa vitesse propre est la moyenne des vitesses de deux points infiniment voisins de part et d'autre de la couche R_e. On peut par suite substi-

tuer aux équations (2) la relation simple

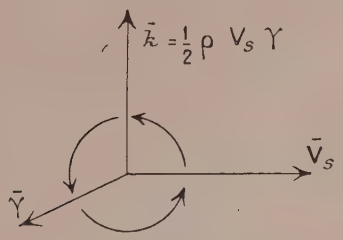
$$k = \frac{1}{2}\rho V_S \gamma, \tag{4}$$

les trois vecteurs $\overline{\gamma}$, $\overline{V}_S$ et $\overline{k}$ formant les trois côtés d'un trièdre trirectangle direct.

Les forces $\overline{k}$ ne dépendant pas d'une fonction de forces, les tourbillons $\overline{\gamma}$ ou « tourbillons liés » n'obéissent pas aux lois de Helmholtz sur le mouvement des tourbillons soumis à des forces conservatives. Le terme qui les désigne correspond bien à l'opposition qu'ils présentent par rapport à ces tourbillons ou « tourbillons libres ».

On peut noter, à propos de l'équation (4), que la force $\overline{k}$ est représentée, à un facteur constant près, par le même vecteur que l'action électrodynamique que subirait un élément de courant d'une nappe dont la distribution de courant serait identique à celle des tourbillons liés γ dans un champ magnétique identique au champ des vitesses V_S.

Fig. 24.



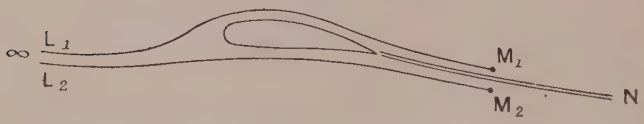
Enfin, il faut remarquer que, la conception de l'aile fluide ne constituant qu'une fiction destinée à remplacer l'aile solide en réalisant la continuité du fluide, il est permis d'imaginer dans cette masse fluide (R) des variations très rapides de pression ou de vitesse.

11. *Mouvement des tourbillons libres.* — La nappe de tourbillons libres N, d'épaisseur infiniment petite dans le fluide parfait, est la limite de la couche fluide formée par la réunion, à l'arrière de l'aile, des couches qui ont été au voisinage immédiat des faces de celle-ci dans un fluide visqueux lorsque la viscosité devient infiniment petite.

Un filet de courant de cette nappe est donc le prolongement d'un filet de courant qui, provenant de l'infini amont, a suivi le contour d'une face de l'aile et y a subi une influence cumulative de l'action de contact. Cette influence qui communique une intensité de tourbillon non nulle aux particules du filet altère en même temps la valeur du paramètre de Bernoulli qui les caractérise. Ce paramètre reprend une valeur constante dès que la particule considérée quitte l'aile puisque dans la nappe N cette particule ne se trouve soumise à aucune force extérieure.

En prenant deux lignes de courant L_1 et L_2 tracées de

Fig. 25.

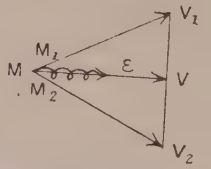


part et d'autre de la nappe et aboutissant en deux points M_1 et M_2 infiniment voisins, on a sur ces lignes tracées dans le fluide libre

$$p_0 + \rho \frac{V_0^2}{2} = p_1 + \rho \frac{V_1^2}{2} = p_2 + \rho \frac{V_2^2}{2},$$

puisqu'elles proviennent du même point de l'infini amont.

Fig. 26.



La pression étant continue à la traversée de la nappe, on a

$$p_1 = p_2,$$

ce qui entraîne

$$V_1 = V_2.$$

Le tourbillon libre ε est perpendiculaire à la différence géométrique des vecteurs égaux (1) V_1 et V_2, donc dirigé suivant leur bissectrice. D'autre part, d'après les propriétés des surfaces de tourbillons de Helmholtz, la composante parallèle

(1) En grandeur mais de directions différentes.

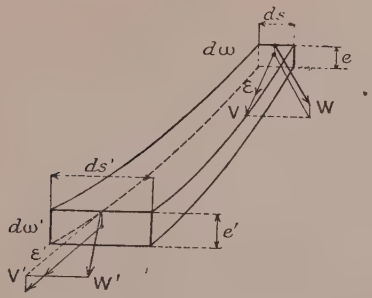
à ε de la vitesse du tourbillon est égale à la moyenne des composantes correspondantes de V_1 et V_2, donc nulle. La vitesse du tourbillon est donc le vecteur V, projection commune des vecteurs égaux V_1 et V_2 sur la bissectrice de l'angle de leurs directions.

Ainsi se trouve démontrée cette propriété caractéristique des lignes de tourbillons libres, qu'elles sont aussi des lignes de courant dans le système de référence lié à l'aile et pour lequel le régime du mouvement est permanent. On a donc

$$\frac{\varepsilon_x}{u} = \frac{\varepsilon_y}{v} = \frac{\varepsilon_z}{w}. \tag{5}$$

Il est à remarquer que cette propriété, qui s'appliquerait aux tourbillons liés si la force de liaison k venait à s'annuler, serait alors la conséquence directe de l'hypothèse que la relation (1) est vérifiée dans toute la zone de ces tourbillons. Ici cette propriété est due au fait que cette relation est vérifiée de part et d'autre de la nappe des tourbillons libres et que la pression reste continue à la traversée de celle-ci.

Fig. 27.



Considérons dans la nappe N une bande ou *lanière* de tourbillons libres et limitons-la à deux sections droites $d\omega$, $d\omega'$. L'épaisseur e étant très petite, la valeur du tourbillon est très grande, mais la quantité $e\varepsilon$ reste finie. La lanière considérée étant un filet de courant, la conservation du flux donne

$$V e\, ds = V' e'\, ds'$$

et celle de la circulation

$$\varepsilon e\, ds = e' \varepsilon'\, ds'. \tag{6}$$

On a donc, le long d'une ligne de tourbillon,

$$\frac{V}{\varepsilon} = \text{const.} = \lambda. \tag{7}$$

C'est le théorème de Beltrami. En outre, le long de la même ligne,

$$p + \rho \frac{V^2}{2} = p' + \rho \frac{V'^2}{2},$$

et au voisinage immédiat dans le fluide libre,

$$p + \frac{\rho}{2}\left[V^2 + \frac{e^2\varepsilon^2}{4}\right] = p' + \rho\left[V'^2 + \frac{e'^2\varepsilon'^2}{4}\right],$$

ou, en comparant,

$$e\varepsilon = e'\varepsilon'. \tag{8}$$

En rapprochant de l'équation (6), on en déduit

$$ds = ds'.$$

Ces relations ne restent vérifiées que si l'épaisseur e de la nappe reste très petite.

Les propriétés précédentes des tourbillons liés et libres ont été déduites par Prandtl d'équations générales obtenues par la conception d'un espace portant formé par la juxtaposition d'une infinité d'ailes élémentaires.

Dans cette analyse, le passage à la limite effectué n'est pas légitimé. Aussi paraît-il préférable de faire appel aux raisonnements précédents qui permettent d'aboutir, d'ailleurs plus simplement, aux mêmes résultats.

12. *Détermination du champ des vitesses.* — Montrons d'abord que si la distribution des tourbillons liés γ et celle des tourbillons libres ε sont connues, le problème est résolu.

Comparons, en effet, dans le trièdre de référence $X_1 Y_1 Z_1$, le champ des vitesses cherché autour de l'aile solide et de la nappe N à celui communiqué au fluide par les tourbillons de l'aile fluide et ceux de la même nappe N. Dans les deux cas, ce champ dérive d'un potentiel et possède les mêmes valeurs sur une sphère de rayon très grand, sur la surface de la nappe N et, par hypothèse, sur la surface de l'aile. Ce potentiel, dont nous admettrons l'existence comme une consé-

quence des hypothèses de la théorie, est déterminé sans équivoque. Les champs comparés sont, par suite, identiques.

Si l'on désigne par $\overline{V_\omega}$ la vitesse communiquée à une particule quelconque du fluide indéfini par les tourbillons liés de la couche R_e de l'aile fluide et par les tourbillons libres de la nappe N, conformément à la loi de Biot et Savart, on voit qu'en rapportant le mouvement au trièdre XYZ lié à S et animé de la vitesse $-\overline{V_0}$ par rapport à $X_1Y_1Z_1$, la vitesse $\overline{V}$ de la particule considérée est la résultante des vecteurs $\overline{V_0}$ et $\overline{V_\omega}$

$$\overline{V} = \overline{V_0} + \overline{V_\omega}.$$

On aperçoit ainsi le bénéfice de la substitution de l'aile fluide à l'aile solide qui permet, en réalisant la continuité du fluide, de calculer les vitesses en appliquant les lois de l'action des tourbillons dans un fluide indéfini.

Mais il faut reconnaître que la résolution complète du problème, simplifiée sur un point, ne l'est pas dans son ensemble. Elle exige, en effet, la connaissance de la répartition des tourbillons liés γ, qui ne sont déterminés que si l'on connaît la distribution des vitesses sur la surface S de l'aile et de la répartition des tourbillons libres que la condition précédente ne détermine qu'à l'origine de la nappe, c'est-à-dire au bord postérieur de l'aile. Il resterait donc à pouvoir déterminer directement ces éléments en fonction des données : la vitesse V_0 et la forme de la surface S de l'aile. Ce problème n'est pas encore résolu, mais nous verrons plus loin comment certaines hypothèses simplificatrices permettent déjà d'aboutir à des résultats dignes d'intérêt.

Si l'on désigne par Σ la surface de tourbillons formée par la couche R_e de tourbillons liés et la nappe N de tourbillons libres, par e' l'épaisseur de Σ et par $d\sigma'$ un élément de cette surface situé au point (x', y', z'), les composantes (u, v, w) de la vitesse d'une particule (x, y, z) dans le système de référence XYZ ont pour expression

$$(9)\quad \begin{cases} u = \displaystyle\int\int_\Sigma \frac{(z-z')(\gamma'_y+\varepsilon'_y) - (y-y')(\gamma'_z+\varepsilon'_z)}{4\pi[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} e'\,d\sigma', \\ v - V_0 = \displaystyle\int\int_\Sigma \dots, \qquad w = \int\int_\Sigma \dots, \end{cases}$$

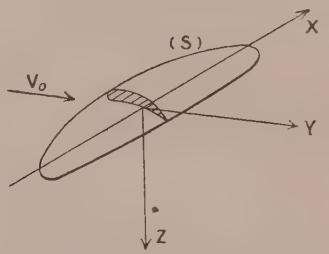
$(\gamma'_x + \varepsilon'_x,\ \gamma'_y + \varepsilon'_y,\ \gamma'_z + \varepsilon'_z)$ désignant les composantes du tourbillon γ ou ε placé au point (x', y', z') de Σ.

Ces composantes vérifient nécessairement la condition d'intégrabilité des tourbillons

$$\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_z}{\partial z} = \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial z} = 0.$$

13. *Détermination de la portance et de la résistance.* — La substitution de l'aile fluide à l'aile solide conservant la distribution des vitesses dans le fluide extérieur conserve aussi celle des pressions sur la surface S de l'aile, et le système des forces k qui fait équilibre à celui des efforts de ces pressions est équivalent à la résultante des actions de l'aile solide sur le fluide.

Fig. 28.



Les axes X, Y, Z étant dirigés comme l'indique la figure, la résultante K des forces k a pour composantes

$$(10)\qquad \begin{cases} K_x = \rho \int\int_S (w\gamma_y - v\gamma_z)\, e\, d\sigma, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{cases}$$

la vitesse (u, v, w) au point (xyz) de S étant donnée par les formules (9).

Si les tourbillons liés sont, dans toute la couche R_e, parallèles à une même direction, ces expressions se simplifient en tenant compte des égalités

$$\int\int e\, d\sigma \left[\gamma_y \int\int_S \frac{(y-y')\gamma'_x - (x-x')\gamma'_y}{4\pi[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}\, e'\, d\sigma' - \gamma_z \int\int_S \frac{(x-x')\gamma'_z - (z-z')\gamma'_x}{4\pi[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}}\, e'\, d\sigma' \right] = 0,$$

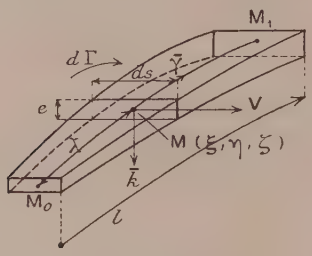
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

ou

$$(11)\quad \left\{ \int\int_S \int\int_S e\,d\sigma\, e'\,d\sigma' \left[\frac{\left\{ \begin{array}{l} \gamma_y[(y-y')\gamma'_x-(x-x')\gamma'_y] \\ -\gamma_z[(x-x')\gamma'_z-(z-z')\gamma'_x] \end{array} \right\}}{4\pi[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2]^{\frac{3}{2}}} \right] = 0, \right.$$
$$\left. \cdots\cdots\cdots\

14. *Cas particulier du filet portant.* — On appelle *filet portant* l'espace portant formé par un filet de tourbillons liés.

Fig. 29.



Ce filet, en forme de *lanière*, est en tout point orthogonal aux lignes de courant.

La résultante des actions de ce filet sur le fluide ambiant, pour un tronçon compris entre les sections droites d'abscisses M_0 et M_1, a pour valeur

$$-dK_x = \rho \int\int_{M_0 M_1} e\, ds\, d\lambda\, [w\gamma_y - v\gamma_z], \qquad \ldots,$$

et comme

$$\frac{\gamma_x}{d\xi} = \frac{\gamma_y}{d\eta} = \frac{\gamma_z}{d\zeta} = \frac{\gamma}{d\lambda},$$

ces expressions deviennent

$$-dK_x = \rho \int\int_{M_0 M_1} e\, ds\, d\lambda\, (w\, d\eta - v\, d\zeta)\frac{\gamma}{d\lambda}$$
$$= \rho \int_{M_0}^{M_1} d\Gamma\, (w\, d\eta - v\, d\zeta),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Ces relations peuvent être considérées comme une généralisation de la proposition de Kutta-Joukowski reliant la portance à la circulation pour une aile à profil constant et envergure infinie qu'elles étendent à un filet portant de forme arbitraire.

IV. — Simplifications possibles de la théorie.

15. La détermination du champ des vitesses se trouve ramenée, comme on l'a vu plus haut, à celle du champ des

tourbillons liés et libres et ce problème n'est pas encore susceptible d'une solution directe.

Provisoirement, on peut en présenter des solutions indirectes et approximatives basées sur des hypothèses relatives à la répartition des tourbillons dans les champs en question. La vérification expérimentale des formules auxquelles conduisent ces hypothèses fournit le critérium permettant de juger de leur valeur et de délimiter leur domaine de validité.

L'un des procédés d'approximation de ce genre est constitué par la *théorie linéaire*.

Supposons que l'on envisage un problème d'écoulement autour d'un espace portant donnant lieu à des forces $\overline{k}$ très petites. Dans l'évaluation des grandeurs correspondant à ce problème, on obtient une approximation du premier ordre si l'on ne conserve pour toutes les grandeurs envisagées que le terme de l'ordre le moins élevé. Cette méthode conduit à une relation linéaire entre les forces $\overline{k}$ et les vitesses supplémentaires $\overline{V_\omega}$ dues aux champs de tourbillons. La forme linéaire de la relation obtenue permet l'usage fécond du procédé de la « superposition ».

La théorie linéaire ainsi édifiée peut être perfectionnée en la combinant avec le procédé des approximations successives. Cependant, à elle seule, elle suffit dans un grand nombre de cas où elle conduit à des formules dont la vérification expérimentale est très satisfaisante.

L'une des hypothèses qui sont à la base de cette théorie simplifiée est la suivante :

Les vitesses supplémentaires $\overline{V_\omega}$ dues aux champs de tourbillons sont partout petites par rapport à la vitesse générale $\overline{V_0}$ du courant. En conséquence, on négligera toujours $\overline{V_\omega}$ à côté de $\overline{V_0}$.

De plus, les lignes de tourbillons libres qui coïncident avec les lignes de courant se transforment, par suite de l'hypothèse précédente, en lignes droites qui s'étendent jusqu'à l'infini en aval de l'aile.

L'erreur introduite par cette approximation dans le calcul de la valeur de $\overline{V_\omega}$ en un point de l'espace portant est de l'ordre du rapport $\frac{V_\omega}{V}$, donc faible.

16. On peut aller plus loin dans la voie de la simplification

et, pour un certain nombre de problèmes, on peut négliger la forme exacte de la répartition des tourbillons $\overline{\gamma}$ dans l'espace portant. C'est ainsi qu'au lieu de la couche de ces tourbillons que nous avons définie au paragraphe 10, on peut regarder chaque aile comme équivalente quant à son effet dans le fluide à un filet unique de tourbillons $\overline{\gamma}$, lieu des centres de gravité des distributions de tourbillons relatives à chaque section de l'aile, filet dont l'intensité tourbillonnaire en chaque point est égale à la circulation totale autour de l'aile dans la section passant en ce point. La validité de cette hypothèse provient de l'allongement, généralement considérable, des ailes d'avions suivant leur envergure.

Le plus souvent, il n'y a pas lieu de se préoccuper des dimensions transversales de ce filet portant. On le supposera alors réduit à une ligne de tourbillons.

17. *Cas du « monoplan droit »*. — On appellera « monoplan droit » l'aile que les hypothèses précédentes permettent de figurer schématiquement par un filet de tourbillons rectiligne, isolé, de longueur finie.

Déterminons la portance et la résistance de cette surface.

Supposons les axes orientés comme l'indique la figure, $-V_0$ désignant toujours la vitesse avec laquelle il faudrait déplacer l'aile dans l'air primitivement immobile pour que le mouvement de celui-ci par rapport au système de référence adopté et lié à l'aile soit celui que nous supposons. La vitesse V_0 est aussi ce que l'on peut appeler la « vitesse d'ensemble » du fluide non troublé, celle qu'aurait par rapport au système considéré le fluide si l'influence de l'aile ne s'y était pas fait sentir. La surface de tourbillons libres qui accompagne l'aile schématisée par un filet de tourbillons ab, d'intensité Γ au point d'abscisse x, est située dans le plan des XY et formée de tourbillons parallèles.

Les composantes de la vitesse $\overline{V_\omega}$ en un point (x, o) de la ligne portante ab ont pour valeur :

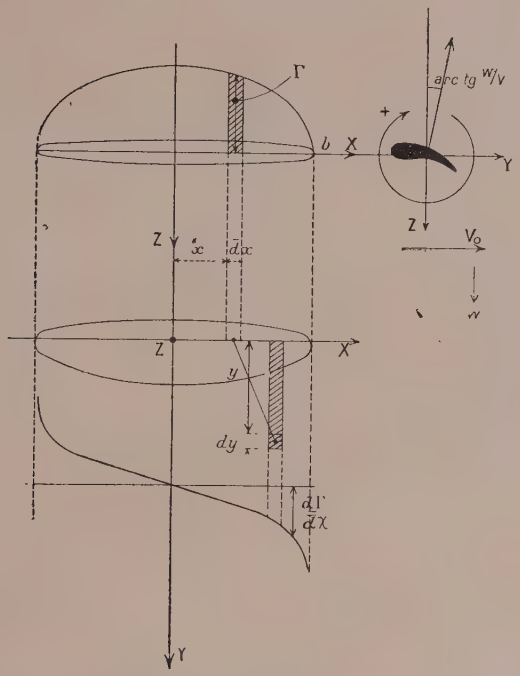
$$u' = o, \qquad v' = o, \qquad w = \frac{1}{4\pi}\int_{x'=a}^{x'=b}\int_{y=0}^{y=\infty}\frac{d\Gamma}{dx'}\frac{(x-x')\,dx'\,dy}{[(x-x')^2+y^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

$$(13) \qquad u' = o, \qquad v' = o, \qquad w' = \frac{1}{4\pi}\int_a^b \frac{d\Gamma}{dx'}\frac{dx'}{x-x'}.$$

Pour $x' = x$, la fonction intégrée passe par l'infini. L'intégrale qui figure dans l'équation (13) doit être définie comme

$$(13\,a)\qquad \lim_{\varepsilon=0}\left(\int_a^{x'-\varepsilon}\frac{d\Gamma}{dx'}\,\frac{dx'}{x-x'}+\int_{x'+\varepsilon}^{b}\frac{d\Gamma}{dx'}\,\frac{dx'}{x-x'}\right)=w'.$$

Fig. 30.



La portance A, ou composante K_z suivant Z de la résultante K, a pour valeur, d'après les équations du paragraphe 14,

$$(14)\qquad A = K_z = \rho V_0 \int_a^b \Gamma\, dx,$$

et la résistance W, ou composante K_y de K suivant y,

$$(15)\qquad -W = K_y = \rho\int_a^b -\Gamma w\, dx = \frac{\rho}{4\pi}\int_a^b\int_a^b -\Gamma(x)\frac{d\Gamma}{dx'}\,\frac{dx\,dx'}{x-x'}.$$

Ces formules ne sont valables, puisqu'elles représentent une approximation du premier ordre, que si w est effective-

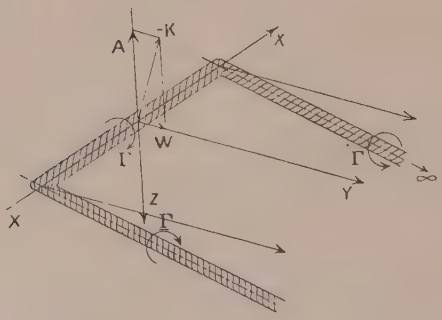
ment petite par rapport à V_0 tout le long de la ligne portante. Tel n'est plus le cas si Γ a une valeur non nulle à l'extrémité de l'aile, car dans ce cas un tourbillon d'intensité finie doit se détacher de l'extrémité de l'aile et ce tourbillon engendre le long de la ligne portante une vitesse w dont la valeur absolue croît en raison inverse de sa distance au tourbillon et, par conséquent, est très grande au voisinage du tourbillon.

Il est à remarquer que ce cas ne peut se présenter si l'angle d'attaque varie de façon continue le long de l'envergure en gardant le même ordre de grandeur, ce qui est le cas général. On peut donc admettre, en principe, que la circulation Γ s'annule aux extrémités de la ligne portante.

18. On peut rendre plus schématique encore la disposition des tourbillons liés et libres équivalente à une aile en mouvement dans un fluide en supposant que la circulation soit constante sur toute l'envergure de l'aile, sauf à ses extrémités, où elle s'annule brusquement.

Le monoplan droit et ses tourbillons libres correspondant à ces conditions équivalent à un système de trois filets de tourbillons rectilignes, d'intensité constante, assemblés comme l'indique la figure.

Fig. 31.



On peut utiliser cette configuration schématique pour étudier l'influence qu'exerce, par les tourbillons libres qu'elle engendre, une aile à une certaine distance.

C'est en particulier ce schéma simple qui a servi au Pro-

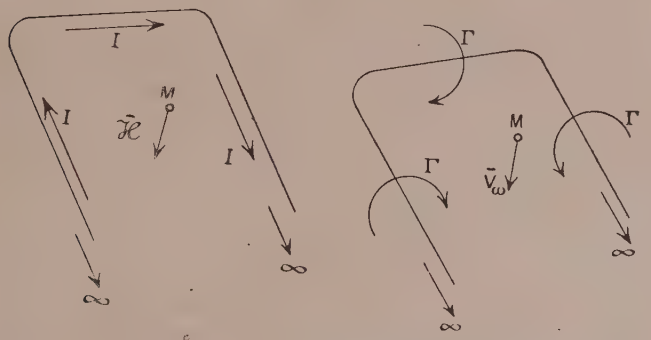
fesseur Prandtl pour évaluer théoriquement l'interaction d'ailes voisines dans un biplan, l'action d'une aile sur les gouvernes situées en aval.

Mais les hypothèses simplificatrices que nécessite ce schéma ne sont plus admissibles si l'on se propose d'étudier l'influence d'une aile sur elle-même.

19. *Remarque. — Analogie électromagnétique.* — On sait que, par suite de la correspondance des équations hydrodynamiques et de celles des champs magnétiques des courants, l'on peut faire correspondre au champ de vitesses dû à un système de tourbillons le champ magnétique dû à un système de filets de courants électriques, ayant même forme que les filets de tourbillon et une intensité égale en chaque point à l'intensité tourbillonnaire du filet correspondant au même point.

C'est ainsi que le champ des vitesses $\overline{V_\omega}$ dues au système

Fig. 32.



de tourbillons du schéma précédent se confond avec le champ magnétique d'un courant d'intensité constante convenable parcourant un conducteur ayant la forme du filet de tourbillons (*fig.* 32).

ANNEXE.

Sur la détermination du potentiel polytrope relatif a un contour K et de la circulation Γ correspondant a une vitesse a l'infini V_0 donnée.

Nous démontrons dans ce qui suit :

I. Que la détermination du potentiel polytrope est unique si l'on se donne Γ et V_0.

II. Que Γ est déterminée, si l'on connaît V_0, pour des profils tels que ceux des ailes d'avions et moyennant une condition supplémentaire imposée au courant par la forme du profil.

I. — Détermination du potentiel polytrope autour d'un profil.

1. Envisageons le problème plan d'hydrodynamique posé par le déplacement d'une aile à profil constant et envergure infinie dans un fluide parfait et incompressible.

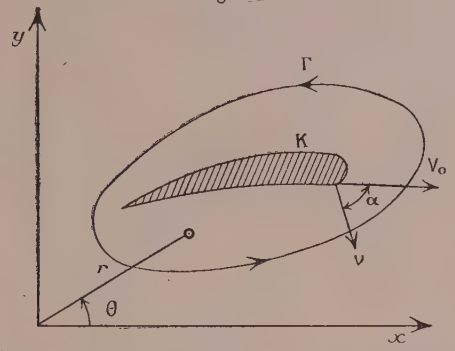
Dans le régime de mouvement qui est permanent par rapport au profil K considéré, nous admettons que le mouvement étudié est régi par un potentiel des vitesses $\varphi(r, \theta)$ que nous rapporterons aux axes par rapport auxquels le fluide à l'infini est immobile. Ce potentiel est polytrope et doué d'une circulation Γ le long d'un contour quelconque tracé dans le fluide et entourant une seule fois le profil K.

Pour expliquer à partir du potentiel initial uniforme (lorsque tout est au repos) la formation de ce potentiel polytrope, il faut admettre qu'il se forme une nappe N de tourbillons à l'arrière du profil K, nappe qui s'évanouit lorsque le régime permanent s'établit, après un intervalle de temps infini. Considérons à un instant t, postérieur au début t_0 de la mise en mouvement du profil K dans le fluide, le bilan énergétique (*fig.* 33).

Le travail dépensé pendant le temps fini $t_0 - t$ pour donner une vitesse finie V au profil K est fini, donc aussi l'énergie cinétique de l'aile et celle communiquée au fluide indéfini, donc aussi celle-ci toute seule (*fig.* 34).

Négligeons l'énergie cinétique de la couche fluide infiniment mince formant la nappe de tourbillons N. Soit φ' le

Fig. 33.

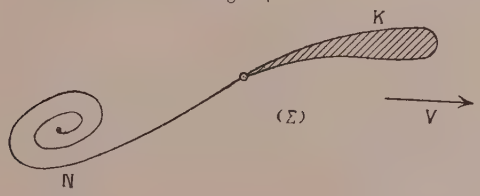


potentiel dont dépend à cet instant le mouvement de tout le reste du fluide. L'énergie cinétique du fluide peut s'exprimer dans ces conditions :

$$W = \rho \int\int_{\Sigma} \left[\left(\frac{\partial \varphi'}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{1}{r_2} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} \right)^2 \right] r \, dr \, d\theta,$$

la somme double étant étendue à tout le plan Σ en dehors du contour K et de la ligne N.

Fig. 34.



Cette intégrale étant finie, il en résulte qu'à l'infini (1)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial r} \sim \frac{\text{f. f.}}{r^{1+m'}}, \qquad \frac{\partial \varphi'}{\partial \theta} \sim \frac{\text{f. f.}}{r^{n'}} \qquad \begin{cases} m' \text{ et } n' > 0, \\ \text{pour } r \to \infty. \end{cases}$$

Ce résultat est constamment vrai. Lorsque le régime permanent s'établit après un temps infini, les tourbillons de N se sont évanouis et il règne un potentiel $\varphi(r, \theta)$ dans tout le

(1) Le symbole $\sim$ signifie : équivalent à; f. f. signifie : fonct. finie.

plan. L'intégrale W peut alors tendre vers une valeur infinie, bien que le travail dépensé par unité de temps pour maintenir à une vitesse V_0 finie le contour K aille en décroissant et tende vers zéro lorsque le temps augmente indéfiniment puisque la traînée est nulle en régime permanent.

Les exposants m' et n' des dérivés de φ', constamment positifs, ne peuvent avoir qu'une limite positive ou nulle (1) :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{\alpha(\theta)}{r^{1+m}}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \sim \frac{\beta(\theta)}{r^n} \qquad \begin{cases} m \text{ et } n \geq 0, \\ \text{pour } r \to \infty. \end{cases}$$

1° n ne saurait être positif. En effet, la circulation du potentiel φ le long d'un cercle de rayon r infini est finie et égale à Γ, d'où

$$\Gamma = \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} \frac{\beta(\theta)}{r^n} r\, d\theta,$$

ce qui exige $n = 0$. Il en résulte que l'énergie cinétique du fluide est nécessairement infinie pour un courant plan à circulation non nulle en régime permanent.

2° m ne saurait être nul. En effet, si m était nul, la fonction $\alpha(\theta)$ se réduirait à une constante, sinon $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}$ ne pourrait être équivalent à une simple fonction de θ lorsque $r \to \infty$ et cette constante α serait nulle car, en vertu de l'incompressibilité du fluide, le flux du courant à travers un cercle de rayon r est nul et pour un rayon $r \to \infty$:

$$0 = \rho \int_0^{2\pi} \frac{\partial\varphi}{\partial r} r\, d\theta = \rho \int_0^{2\pi} \frac{\alpha r}{r}\, d\theta = \rho\, \alpha\, 2\pi.$$

Le potentiel φ est donc tel qu'à l'infini

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r} \sim \frac{\alpha(\theta)}{r^\gamma}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} \sim \beta(\theta) \qquad (\gamma > 1).$$

Cherchons quelle est la fonction équivalente à l'infini au potentiel φ. L'équation de Laplace en coordonnées polaires est

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} = 0;$$

(1) On voudra bien ici admettre les propositions qui précèdent. Leur démonstration rigoureuse, possible, bien que délicate, entraînerait trop loin.

ce qui donne, à l'infini,

$$-\gamma\frac{\alpha(\theta)}{r^{1+\gamma}}+\frac{\alpha}{r^{1+\gamma}}+\frac{1}{r^2}\frac{d\beta}{d\theta}+\ldots=0,$$

d'où

$$\frac{d\beta}{d\theta}=0,\qquad \beta=k$$

et, par conséquent,

$$\varphi_{r\to\infty}\sim\frac{\alpha(\theta)}{r^{\gamma-1}}\left(\frac{1}{1-\gamma}\right)+k\theta+k',\qquad(\gamma>1),$$

et la fonction φ reste finie lorsque le point (r,θ) s'éloigne à l'infini dans le plan.

2. *Énoncé du problème mathématique.* — Le problème mathématique envisagé consiste donc à chercher une fonction $\varphi(r,\theta)$ qui soit harmonique et régulière dans tout le plan extérieur au contour K et telle que :

1° Ses dérivées partielles s'annulent à l'infini, la fonction restant finie;

2° Sa dérivée normale au cercle de rayon infini soit équivalente à $\frac{\text{f.f.}}{r^\gamma}$ avec $\gamma>1$;

3° Sa dérivée normale au contour K soit égale à $V_0\cos\alpha$, α désignant l'angle de V_0 et de la normale extérieure au contour;

4° La circulation sur un contour enlaçant une fois le contour K ait une valeur finie Γ.

Ce problème admet une solution et une seule.

Pour démontrer qu'il existe une solution, il suffit de remarquer, pour le contour circulaire, que la fonction $\varphi-\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$ possède toutes les propriétés de la fonction sauf celle relative à la circulation qui est nulle et l'on se trouve ramené au problème extérieur de Neumann dont la solution existe et est unique. Une représentation conforme convenable permet alors d'affirmer que le résultat établi pour le contour circulaire est valable pour un contour quelconque.

3. *Détermination unique de la solution.* — Nous nous

contenterons ici de montrer que si la solution existe, elle est unique.

Soient, en effet, pour un contour K quelconque deux fonctions φ_1 et φ_2 que nous supposerons solutions du problème considéré. Désignons par ψ la différence

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \psi.$$

Appliquons à cette fonction la formule de Riemann pour l'espace Σ compris entre le contour K et un cercle C de rayon r très grand :

$$\int\int_{\Sigma}\left[\psi\,\Delta\psi + \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma + \int_{K}\psi\frac{d\psi}{dv}\,ds + \int_{C}\psi\frac{d\psi}{dr}\,ds = 0.$$

La fonction ψ est harmonique à l'extérieur du contour K, sa dérivée normale est nulle sur le contour et équivalente à $\frac{\text{f.f.}}{r^\gamma}$ $(\gamma > 1)$ sur le cercle C lorsque $r \to \infty$. De plus, sur ce cercle, la fonction ψ reste finie.

On a donc

$$\int\int_{\Sigma}\psi\,\Delta\psi\,d\sigma = 0, \qquad \int_{K}\psi\frac{d\psi}{dv}\,ds = 0,$$
$$\int_{C}\psi\frac{d\psi}{dr}\,ds \to 0 \qquad (r \to \infty),$$

et, si l'on fait tendre r vers l'infini, l'aire Σ devient l'aire indéfinie extérieure au contour K, où l'on a

$$\int\int_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] d\sigma = 0.$$

Il en résulte qu'en tout point du plan extérieur au contour K,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial\psi}{\partial y} = 0.$$

La fonction ψ se réduit donc à une constante et

$$\varphi_1 = \varphi_2 + \text{const.}$$

Si la fonction φ, solution du problème proposé, existe,

cette solution est donc bien unique (déterminée à une constante près).

II. — Calcul de la portance d'un profil.

5. On a démontré que, dans un courant à potentiel polytrope de circulation Γ et vitesse uniforme V_0 à l'infini, la portance d'un profil (force portante d'une aile d'envergure infinie et profil constant par unité de longueur suivant l'envergure) a pour valeur

$$Y = \rho V_0 \Gamma.$$

Dans le cas où le profil considéré serait un cercle, le problème du calcul de Y serait indéterminé, car la valeur de la circulation Γ, lorsqu'on se donne V_0, est arbitraire.

Nous allons montrer que dans le cas des profils d'ailes cette indétermination peut être levée.

Auparavant, il est utile de rappeler les propriétés des représentations conformes utilisées pour déduire l'un de l'autre les courants irrotationnels autour de deux profils donnés.

6. *Détermination de la représentation conforme d'aires extérieures à des contours donnés.* — Rappelons d'abord un théorème dû à Riemann, d'après lequel : « Il est possible de déterminer une fonction analytique $Z' = g(z')$, qui fait correspondre point par point l'aire intérieure à un cercle C′ du plan z', à l'aire intérieure à un contour K′ du plan Z′. Les points des contours K′ et C′ se correspondent de façon univoque si le contour simple K′ formé d'un ou plusieurs arcs analytiques ne comprend qu'un nombre fini de points anguleux. »

« Enfin, cette fonction $g(z')$ dépend de trois constantes arbitraires qui permettent de faire correspondre, d'une part, le centre du cercle C′ à un point déterminé de l'aire intérieure au contour K′, et, d'autre part, un point déterminé du cercle C′ à un point déterminé du contour K′. »

En utilisant la transformation d'inversion, également conforme, et l'appliquant aux plans Z′ et z' par rapport à des

cercles contenus, l'un dans le contour K′ et l'autre dans le cercle C′, on déduit immédiatement du théorème de Riemann précédent que :

« Il est possible de déterminer une fonction analytique $Z = g(z)$, qui fait correspondre point par point l'aire du plan Z extérieure à un contour K, contour compris, à l'aire du plan z, extérieure à un cercle C, le contour de ce cercle compris. Cette fonction est complètement déterminée si l'on fait correspondre un point déterminé de K à un point déterminé de C et les points à l'infini entre eux par la condition

$$Z = \lambda z, \text{ à l'infini,}$$

λ étant un paramètre déterminé par le choix des points arbitrairement fixés de C et K que l'on astreint à se correspondre. »

7. *Application aux profils d'ailes.* — Nous supposons que les profils, analogues à ceux utilisés aujourd'hui pour les avions, présentent sur tout le contour une courbure continue, sauf au bord arrière formant une arête vive.

Soit un cercle C dans le plan de la variable $Z = x + iy$ et un courant de vitesse à l'infini v_0 et circulation Γ. Soit, d'autre part, un profil d'aile K dans le plan de la variable Z.

Soit $Z = g(z)$ la fonction analytique qui définit la représentation conforme faisant correspondre le cercle C au profil K, le point E de K au point arbitraire P de C et les points à l'infini des deux plans entre eux par la relation

$$Z = \lambda z, \text{ à l'infini.}$$

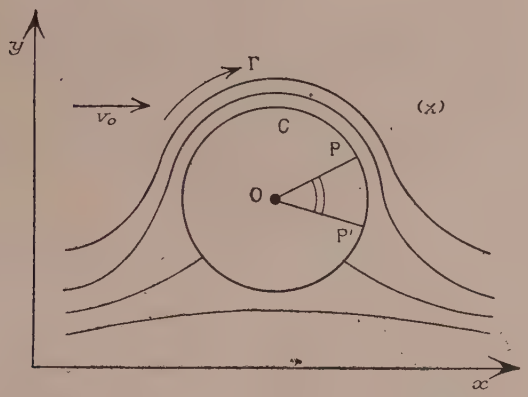
Le théorème énoncé plus haut montre que cette transformation est unique. Elle fait correspondre au courant du plan z un courant de circulation Γ et vitesse à l'infini V_0 telle que

$$V_0 = v_0 \frac{I}{\lambda},$$

et ce courant représente la seule forme possible d'écoulement irrotationnel du fluide caractérisé par Γ et V_0 autour du profil K.

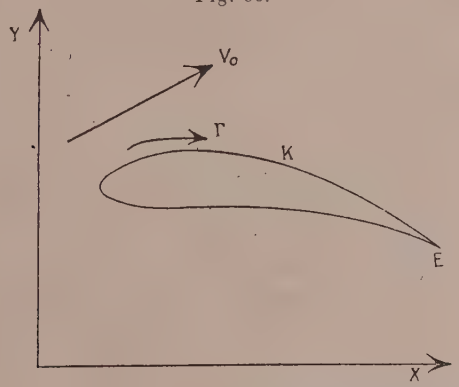
En fixant le point P de C auquel correspond le point E de K, on détermine la quantité imaginaire λ. En choisissant

Fig. 35.



un autre point P′, la nouvelle transformation cherchée réalisant la correspondance des points à l'infini et des points P′

Fig. 36.



et E se compose évidemment d'une rotation du plan z de l'angle $\widehat{POP'}$ autour du centre O du cercle C suivie de la première transformation, car la transformation ainsi définie est une représentation conforme satisfaisant aux conditions du problème et celui-ci n'admet qu'une solution.

Le choix du point arbitraire P de C définit donc l'écart

qui existe entre les directions à l'infini des deux plans, soit entre v_0 et V_0 par exemple.

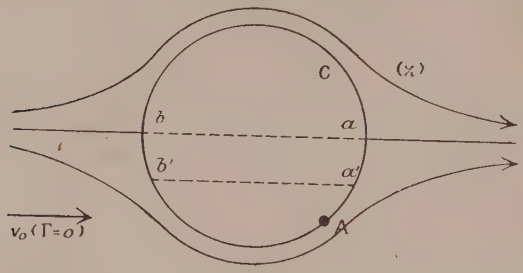
Soient donc A le point particulier choisi sur le cercle P et v_0 la vitesse à l'infini dans le plan z. .

Le courant autour de C dans le plan z se compose :

1° Du courant irrotationnel sans circulation et de vitesse à l'infini v_0;

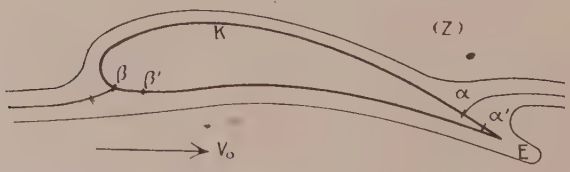
2° Du courant de circulation Γ autour du cercle C.

Fig. 37.



Au premier, la transformation choisie fait correspondre un courant sans circulation autour de K dans lequel le point A de vitesse nulle sur C correspond à un point α de K voisin de E. L'arête vive E est donc contournée par le courant et la vitesse du fluide est, par suite, infinie en ce point.

Fig. 38.



Au deuxième, la même transformation fait correspondre un courant de même circulation Γ autour de K, également avec une vitesse infinie en E.

Le courant résultant dans le plan z est caractérisé par une vitesse nulle en a' et b', son transformé dans le plan Z par une vitesse nulle en α' et β' correspondant à a' et b'. Tant que α' n'est pas confondu avec E, l'arête vive reste contournée par le courant résultant, ce qui entraîne l'existence

d'une vitesse infinie dans le fluide. On ne saurait admettre ce résultat.

La forme du profil K conduit donc à considérer le point E comme correspondant à un point de vitesse nulle sur C et, par suite, le point A à présenter ce caractère. Cette condition détermine, sans ambiguïté, la valeur de Γ.

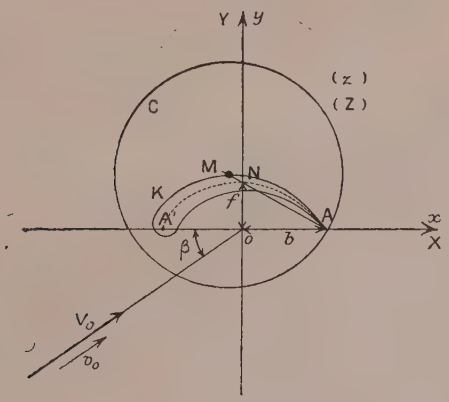
8. *Application aux profils Joukowski.* — Les profils Joukowski dérivent du cercle par une transformation simple. Leur forme rappelle celle des sections des ailes d'oiseau.

Soit un cercle C du plan z passant par le point $A(b)$ et de centre $M[-\varepsilon b + if(1+\varepsilon)]$. La représentation conforme définie par

$$Z = \frac{1}{2}\left(z + \frac{b^2}{z}\right)$$

transforme ce cercle en un profil Joukowski K dans le plan Z. Ce contour enveloppe l'arc de cercle AA′ auquel ses deux

Fig. 39.



bords sont tangents en A. Cet arc passant par le point A, son symétrique A′ par rapport à l'origine et l'intersection N du rayon AM avec l'axe des y, est appelé le *squelette* du profil K.

Si $h(z)$ définit le courant autour de C, la fonction

$$H(Z) = h[z(Z)]$$

définit le courant autour du profil K. Dans ce courant la vitesse a pour expression

$$\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Z}} = \frac{dh}{dz}\,\frac{dz}{d\mathrm{Z}}.$$

A l'infini, en particulier,

$$\mathrm{V}_0 = v_0 2 = 2v_0.$$

La circulation Γ correspondant à V_0 est déterminée par la condition que le point A soit un point de vitesse nulle sur le cercle C pour la vitesse à l'infini v_0, ce qui conduit à la relation facile à établir :

$$\Gamma = 4\pi v_0(1+\varepsilon)\sqrt{b^2+f^2}\,\sin\left(\beta + \operatorname{arc\,tang}\frac{f}{b}\right),$$

où β désigne l'angle de la vitesse v_0 avec la corde AA′ de longueur $2b$ et flèche f, et ε le paramètre définissant l'épaisseur de l'aile.

Il est à remarquer que dans le courant transformé, au point E, la vitesse a pour expression

$$\left(\frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{Z}}\right)_{\mathrm{E}} = \left(\frac{dh}{dz}\right)_{\mathrm{A}} \frac{1}{\frac{1}{2}\left(1-\frac{b^2}{z^2}\right)}$$

et prend la forme indéterminée $0\times\infty$. Cette indétermination se lève aisément et la valeur effective de la vitesse est $(m+ni)$, où m et n sont finis.

Pour un profil d'aile quelconque le point E est un point anguleux sur le contour. La vitesse du courant transformé doit y garder une valeur finie et la représentation conforme qui fait dériver le profil considéré d'un cercle doit respecter cette condition.

DEUXIÈME PARTIE.

LES PROBLÈMES DE LA « THÉORIE LINÉAIRE ».

I. — Formules générales de la théorie linéaire.

1. Considérons une aile et un trièdre de référence disposés comme l'indique la figure 40.

La théorie de l'aile portante substitue à cette aile un filet de tourbillons liés AB dont le flux tourbillonnaire dans la section d'abscisse x a même valeur que la circulation $\Gamma(x)$ qui animerait le fluide autour de l'aile dans la même section. La portance unitaire en ce point a pour valeur

$$\frac{dK_z}{dz} = \rho V \Gamma(x), \tag{1}$$

où V représente la vitesse de translation de l'aile dans le fluide primitivement immobile.

A l'arrière de cette aile ou de ce filet portant se détachent des filets rectilignes de tourbillons libres, parallèles à la vitesse V, formant une nappe plane où l'intensité tourbillonnaire pour l'abscisse x a pour valeur

$$\varepsilon(x) = \frac{d\Gamma}{dx}. \tag{2}$$

La vitesse, par rapport aux axes liés à l'aile, d'une particule fluide en contact avec l'aile schématisée par le filet portant, c'est-à-dire par un segment de l'axe des x, a pour composantes

$$u = 0,$$
$$v = V,$$
$$w(x) = \frac{1}{4\pi} \int_a^b \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx'}{x - x'}. \tag{3}$$

La portance totale a pour valeur

$$A = \rho V \int_a^b \Gamma \, dx. \tag{4}$$

La résistance W ou composante suivant V de la réaction otale de l'air sur l'aile a pour valeur

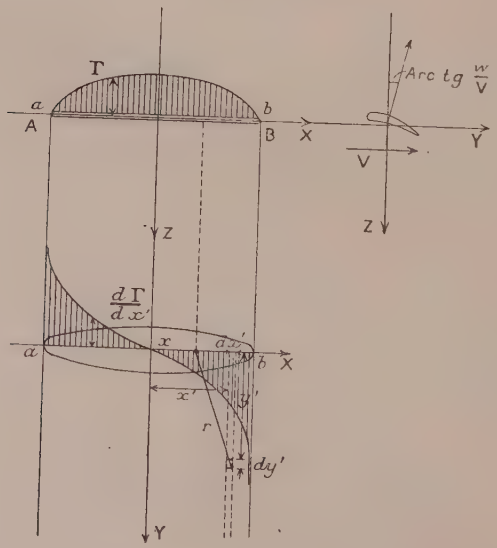
$$(5) \qquad W = \rho \int_a^b \Gamma w \, dx = \frac{\rho}{4\pi} \int_a^b \int_a^b \Gamma(x) \frac{d\Gamma}{dx'} \frac{dx\, dx'}{x - x'}.$$

Les hypothèses simplificatrices ci-dessus forment la première étape de la théorie dite « Théorie Linéaire ». Cette dénomination est tirée du fait que la simplification faite en considérant la vitesse supplémentaire de composantes (u, v, w) comme négligeable, par rapport à la vitesse générale V, conduit à une relation linéaire entre les réactions de l'air sur un élément d'aile et la vitesse supplémentaire au même endroit.

II. — Monoplan (1).

2. *Premier problème.* — On donne la distribution $\Gamma(x)$ de la circulation le long de l'envergure, la densité ρ et la

Fig. 40.



vitesse V de l'aile, déterminer la forme de l'aile et la résis-

(1) *Cf.* PRANDTL, *Tragflügeltheorie*, I. Mitteilung, p. 470 et suiv.

tance correspondantes. Ce problème peut être résolu à l'aide des équations de la théorie car le calcul de la composante w de la vitesse et de la résistance W se ramène aux quadratures (3) et (5).

La connaissance de w permet la détermination ultérieure de la forme de l'aile.

En supposant connu le profil de l'aile, et par suite ses propriétés aérodynamiques, on peut calculer l'angle d'attaque correspondant à une profondeur d'aile donnée et inversement.

Les hypothèses simplificatrices de la théorie conduisent à admettre avec une approximation suffisante, au moins pour les ailes assez allongées, qu'un élément d'une aile d'envergure finie, orienté sous l'angle d'attaque α et tel qu'au point de l'envergure où il est situé la vitesse verticale de descente de l'air soit w supporte la même portance qu'un élément identique d'une aile d'envergure infinie immergé dans le même courant sous un angle d'attaque α' (paramètre géométrique arbitraire que nous définirons par l'inclinaison de la corde du profil sur la vitesse de celui-ci dans l'air primitivement immobile). Ces angles de même efficacité ou « isoportants » sont liés par la relation

$$\alpha = \alpha' + \text{arc tang } \frac{w}{V}, \tag{6}$$

w étant connu, on voit que la connaissance de $\alpha(x)$ entraîne celle de $\alpha'(x)$ et inversement.

D'autre part, en désignant par t la profondeur de l'aile, on peut, avec la même approximation, exprimer la circulation Γ par la relation

$$\Gamma = V t f(\alpha'), \tag{7}$$

et la fonction $f(\alpha')$ se réduit pratiquement à la forme linéaire

$$f(\alpha') = c_1 \alpha' + c_2. \tag{8}$$

Kutta a donné, pour la plaque incurvée en arc de cercle, la formule suivante où β désigne l'angle au centre de l'arc circulaire

$$f(\alpha') = \pi . \alpha' + \frac{\pi}{4} \beta. \tag{9}$$

D'après Mises, pour les profils usuels, la valeur du coefficient c_1 serait sensiblement égale à π.

3. *Deuxième problème.* — On se donne la forme de l'aile. Déterminer la distribution correspondante de la portance et la valeur de la résistance.

Ce problème, inverse du précédent, est plus difficile à traiter au point de vue mathématique, car il conduit à une équation intégrale.

Pour obtenir cette équation, il nous suffira dans le système

$$w = \frac{1}{4\pi}\int_a^b \frac{d\Gamma}{dx'}\frac{dx'}{x-x'},$$

$$\alpha = \alpha' + \operatorname{arc\,tang}\frac{w}{V},$$

$$\Gamma = V\,t(c_1\alpha' + c_2)$$

de faire l'approximation

$$\operatorname{arc\,tang}\frac{w}{V} \sim \frac{w}{V}, \tag{10}$$

et d'éliminer entre ces trois équations les quantités w et α'. Il vient

$$\frac{1}{4\pi V}\int_a^b \frac{d\Gamma}{dx'}\frac{dx'}{x-x'} + \frac{\Gamma}{c_1 V\,t(x)} - \frac{c_2}{c_1} = \alpha(x), \tag{11}$$

équation cherchée où c_1, c_2 et les fonctions $t(x)$, $\alpha(x)$ sont les données du problème et $\Gamma(x)$ l'inconnue. La résistance W se calcule ensuite par la quadrature

$$W = \rho\int_a^b \Gamma w\,dx. \tag{5}$$

On se contente, en général, de chercher des solutions approchées de ces problèmes dont les exemples suivants donnent une idée.

Exemple I. — On suppose que pour l'aile d'envergure infinie la circulation varie le long de l'envergure suivant une loi périodique. Déterminer la forme de l'aile et sa résistance.

Développons la circulation en série de Fourier et ne con-

servons que le premier terme

$$\Gamma = \overline{\Gamma} \cos \mu x. \tag{12}$$

L'équation (3) donne pour la vitesse w

$$w(x) = \frac{\mu \overline{\Gamma}}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \mu x'}{x' - x} \, dx', \tag{13}$$

ou, en posant $\mu (x' - x) = u$,

$$\frac{4\pi w}{\mu \Gamma} = \sin \mu x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos u \, du}{u} + \cos \mu x \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u \, du}{u}. \tag{14}$$

La première de ces deux intégrales est nulle, la seconde égale à π, de sorte que

$$w = \frac{\mu \overline{\Gamma}}{4} \cos \mu x = \frac{\mu \Gamma}{4}. \tag{15}$$

En prenant pour origine des angles d'attaque α' l'incidence de portance nulle, l'expression (7) de la portance devient

$$\Gamma = V t c_1 \alpha'. \tag{16}$$

L'angle d'attaque isoportant α' pour un élément d'une aile d'envergure infinie et de profil constant est lié à

Fig. 41.

l'angle α de l'élément de même profil de l'aile étudiée par la relation

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{V} = \frac{\Gamma}{V} \left(\frac{1}{c_1 t} + \frac{\mu}{4} \right) = \alpha' \left(1 + \frac{c_1}{4} \mu t \right). \tag{17}$$

En introduisant la longueur d'onde $\lambda = \frac{2\pi}{\mu}$,

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = 1 + \frac{\pi c_1 t}{2\lambda}, \tag{18}$$

et en admettant, d'après Mises, que le coefficient c_1 soit sen-

siblement égal à π, on obtient la formule approchée

$$\frac{\alpha}{\alpha'} \sim 1 + 5\frac{t}{\lambda}. \tag{19}$$

Pour une envergure l comprenant un nombre entier de demi-périodes, la valeur de la résistance est

$$W = \frac{\overline{\Gamma}^2 \mu}{4} \int_0^l \cos^2 \mu x \, dx = \frac{\rho l \overline{\Gamma}^2 \mu}{8}. \tag{20}$$

En prenant la série de Fourier complète du développement de $\Gamma(x)$, l'intégrale précédente comprendrait des termes en $\cos^2$ et des produits de cosinus. L'intégration de ceux-ci donne une valeur nulle aux limites qui coïncident avec des demi-périodes. L'expression générale de la résistance est par suite

$$W = \frac{\rho l}{8} \Sigma \mu \overline{\Gamma}^2. \tag{20^a}$$

On traiterait de façon analogue sur cet exemple le deuxième problème. En développant $\alpha(x)$ donné en série de Fourier, on peut calculer pour chaque terme la valeur correspondante de α' et par suite de Γ. Il suffit ensuite de sommer ces termes pour avoir la fonction cherchée.

Exemple II. — On envisage ici le cas d'une aile d'envergure finie (monoplan) et pour éviter certaines singularités invraisemblables aux extrémités de l'aile, on suppose que la circulation est répartie suivant l'envergure selon la loi

$$\Gamma = \sqrt{1 - \xi^2}(\Gamma_0 + \Gamma_2 \xi^2 + \Gamma_4 \xi^4 + \ldots), \tag{21}$$

où $\xi = \frac{2x}{b}$, b désignant l'envergure.

La portance totale a pour valeur, d'après l'équation (4),

$$A = \rho V \int_{-\frac{b}{2}}^{+\frac{b}{2}} \Gamma \, dx = \frac{\pi}{2} \rho b V \Sigma q_n \Gamma_{2n}, \tag{22}$$

avec

$$q_n = \frac{p_n}{2n+2} \qquad \text{et} \qquad p_n = \frac{1.3\ldots(2n-1)}{2.4\ldots 2n},$$

et

$$p_0 = 1, \qquad q_0 = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire

$$p_1 = \frac{1}{2}, \qquad q_1 = \frac{1}{8},$$

$$p_2 = \frac{3}{8}, \qquad q_2 = \frac{1}{16},$$

$$p_3 = \frac{5}{16}, \qquad q_3 = \frac{5}{128},$$

$$\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

La vitesse de descente $w(x)$ est donnée, d'après (3), par la relation

$$(23) \quad w = \frac{1}{2b} \sum n \left\{ \Gamma_{2n} \sum_{m=1}^{m=n} \xi^{2m} [(2n+1)p_{n-m} - 2np_{n-m-1}] \right\},$$

et la résistance W, d'après (5), par

$$(24) \quad W = \frac{4}{\pi\rho} \sum_i \sum_k \left\{ \Gamma_{2i}\Gamma_{2k} \sum_{m=0}^{m=k} q_{i+m} [(2k+1)p_{k-m} - 2kp_{k-m-1}] \right\}.$$

Ces relations s'obtiennent facilement en remarquant dans l'intégration à effectuer que

$$(25) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{\eta^{2n+1}\, d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}(\xi - n)} = \pi \sum_{m=0}^{m=\infty} p_{n-m}\, \xi^{2m}$$

et

$$(26) \quad \int_{-1}^{+1} \xi^{2m} \sqrt{1-\xi^2}\, d\xi = \pi q_n.$$

En effectuant le calcul numérique et limitant les développements aux premiers termes, les relations (22), (23) et (24) deviennent

$$(22^a) \quad A = \frac{\pi}{4} \rho b V \left(\Gamma_0 + \frac{1}{4}\Gamma_2 + \frac{1}{8}\Gamma_4 + \ldots \right),$$

$$(23^a) \quad w = \frac{1}{2b} \left[\Gamma_0 + \Gamma_2 \left(3\xi^2 - \frac{1}{2} \right) + \Gamma_4 \left(5\xi^4 - \frac{3}{2}\xi^2 - \frac{1}{16} \right) + \ldots \right],$$

$$(24^a) \quad W = \frac{\pi\rho}{4} \left[\frac{1}{2}\Gamma_0^2 + \frac{1}{4}\Gamma_0\Gamma_2 + \frac{1}{8}\Gamma_0\Gamma_4 + \ldots \right.$$

$$+ \frac{1}{8}\Gamma_2^2 + \frac{1}{64}\Gamma_2\Gamma_4 + \ldots$$

$$\left. + \frac{1}{256}\Gamma_4^2 + \ldots \right].$$

4. On peut à l'aide des formules précédentes déterminer la distribution de la portance qui conduit pour une portance totale et une vitesse données à une résistance minima.

Le calcul montre que l'on obtient ce minimum en supposant nuls tous les Γ_{2n} à l'exception de Γ_0, la distribution de la portance est alors dite elliptique car elle se confond avec celle des ordonnées d'une demi-ellipse ayant pour axe l'envergure de l'aile. La fonction $w(x)$ se réduit alors à une constante. On peut exprimer dans ce cas les valeurs de w et W en fonctions de A, V et b par des formules simples : il suffit d'éliminer Γ_0 entre les équations (22^a), (23^a) et (24^a), où l'on annule tous les Γ_{2n} sauf Γ_0 :

$$w = \frac{2A}{\pi\rho V b^2}, \tag{27}$$

$$W = \frac{w}{V}A = \frac{2A^2}{\pi\rho V^2 b^2}. \tag{28}$$

Pour déterminer complètement l'aile répondant à ces conditions, il faut connaître :

a. son envergure;

b. la loi de variation du profil suivant l'envergure;

c. la loi de variation de la profondeur suivant l'envergure;

d. la loi de variation de l'angle d'attaque suivant l'envergure.

On peut se donner arbitrairement ou l'envergure ou la portance unitaire dans le plan de symétrie. La portance totale donnée permet de déterminer l'un des éléments connaissant l'autre.

On peut se donner arbitrairement deux des trois lois de variation *b*, *c* ou *d*.

La forme elliptique de la distribution de la portance permet de déterminer la loi de variation du troisième élément. La valeur de la portance médiane permet alors de déterminer les éléments intéressants : profondeur, angle d'attaque dans le plan de symétrie, ce qui fixe « l'échelle » et la présentation au courant du type d'aile envisagé.

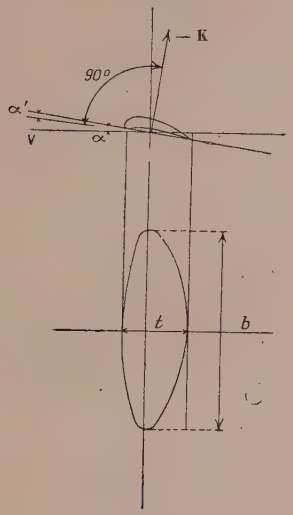
Ainsi, supposons que la forme du profil et l'angle d'attaque efficace α' soient constants le long de l'envergure. La cons-

tance de w qui caractérise l'aile à résistance minima entraîne celle de α d'après (6)

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{V}.$$

Enfin, de la relation $\Gamma = V.t.f(\alpha')$, où $f(\alpha')$ se réduit à une constante, on déduit que la loi de variation de la profondeur t est elliptique comme celle de Γ. Le contour de l'aile est formé de deux demi-ellipses.

Fig. 42.



Les considérations qui précèdent permettent, pour cette aile à résistance minima pour une portance totale donnée, de calculer l'influence du rapport des côtés ou rapport de l'envergure à la profondeur médiane.

La portance totale A peut s'écrire

$$(29) \qquad A = \rho V \int \Gamma \, dx = \rho V^2 f(\alpha') \int t \, dx,$$

puisque pour l'aile envisagée α' et $f(\alpha')$ sont constants le long de l'envergure. En introduisant la surpression d'arrêt

$$q = \frac{1}{2} \rho V^2,$$

on peut poser

$$c_a = \frac{A}{qF} = 2f(\alpha'), \tag{30}$$

F désignant la surface de l'aile. Le coefficient c_a est une grandeur sans dimensions qui, si l'on maintient constante la forme du profil, ne dépend que de l'angle d'attaque efficace. L'angle d'attaque géométrique α isoportant peut alors s'exprimer par la relation

$$\alpha = \alpha' + \frac{w}{V} = \alpha' + \frac{c_a F}{\pi b^2}. \tag{31}$$

On admet que la résistance d'une aile dans un fluide réel se compose de deux parties :

1° La résistance W_i, due aux tourbillons libres, qui existe seule dans le fluide parfait où elle a la valeur W donnée par l'équation (5) et qu'on appelle « résistance induite » pour montrer qu'elle est due à l'influence mutuelle des éléments d'aile.

2° La résistance W_0 due à la viscosité du fluide réel ou « résistance de profil ». On a donc pour la résistance totale dans un fluide réel

$$W = W_i + W_0,$$

expression où l'on peut considérer les grandeurs sans dimensions

$$c_w = \frac{W}{qF}, \qquad c_{w_i} = \frac{W_i}{qF}, \qquad c_{w_0} = \frac{W_0}{qF}.$$

Pour un profil donné, le coefficient de la résistance de profil c_{w_0} ne dépend que de l'angle d'attaque efficace α'.

On peut donc écrire

$$c_{w_i} = c_a \frac{w}{V} = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2}, \tag{32}$$

$$c_w = \frac{c_a^2 F}{\pi b^2} + c_{w_0}(\alpha'). \tag{33}$$

Prenant alors α' ou, ce qui revient au même, c_a pour variable indépendante, on peut écrire les relations suivantes où les indices 1 et 2 caractérisent les grandeurs relatives à des ailes du type envisagé ne différant que par la valeur du

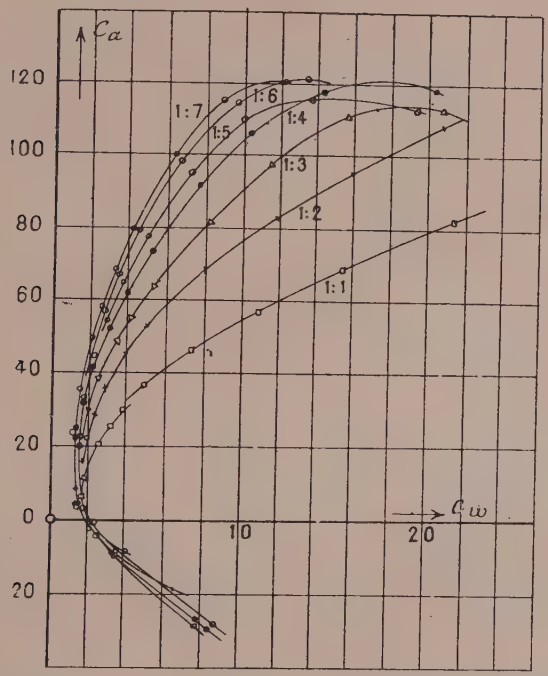
rapport des côtés $\frac{b}{t}$ et par conséquent telles que $c_{a_1} = c_{a_2} = c_a$

$$(31^a) \qquad \alpha_1 - \alpha_2 = \frac{c_a}{\pi}\left(\frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2}\right),$$

$$(33^a) \qquad c_{w_1} - c_{w_2} = \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{F_1}{b_1^2} - \frac{F_2}{b_2^2}\right).$$

5. Ces formules établies pour les ailes elliptiques dans les fluides réels s'appliquent même, ainsi que l'ont montré

Fig. 43.



Diagrammes polaires d'essais pour des ailes de rapports $\frac{\text{profondeur}}{\text{envergure}}$:

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}.$$

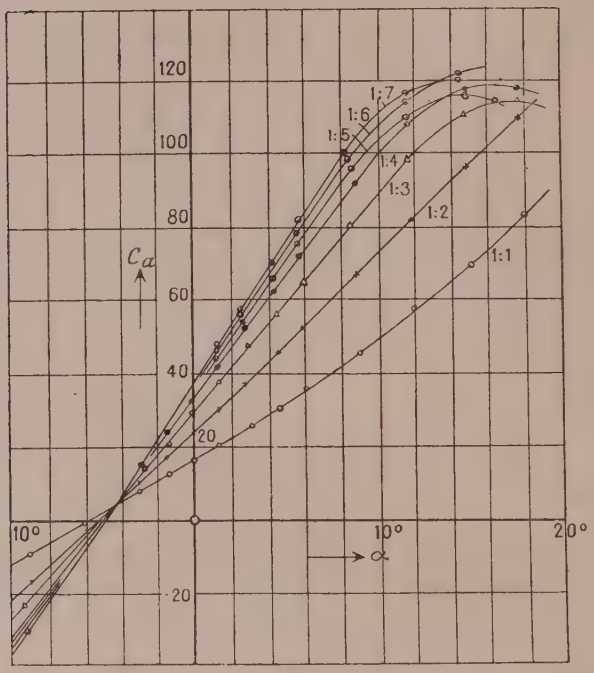
c_a = coefficient de portance; c_w = coefficient de résistance;
α = angle d'attaque.

A. Betz et M. Munk par les essais du laboratoire de Göttingen, à des ailes à contours différents. Elles permettent

donc pour un grand nombre de surfaces portantes de déduire des caractéristiques relevées aux essais sur un modèle à rapport des côtés déterminé celles relatives à un modèle caractérisé par une valeur différente de ce rapport.

L'extension du champ de validité de la formule (31^a) est

Fig. 44.



Variation du coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque mesurée au laboratoire pour les ailes :

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}.$$

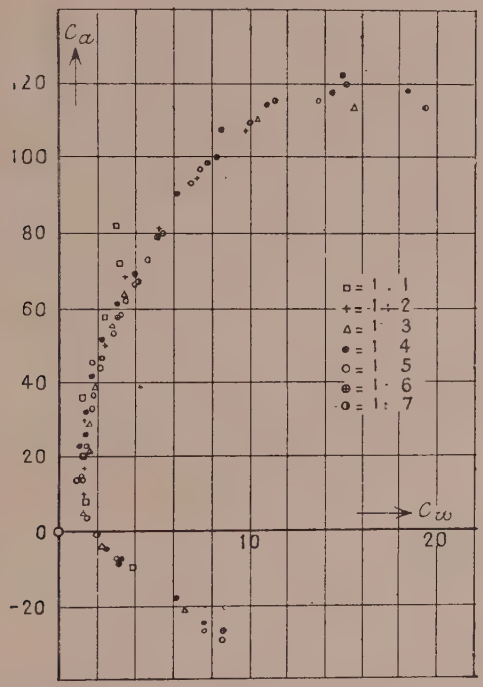
c_a = coefficient de portance; c_w = coefficient de résistance; α = angle d'attaque.

permise par le fait que le contour d'une aile a une influence faible sur la forme de la distribution de sa portance : ainsi par exemple, cette forme est peu différente pour l'aile elliptique et celle à contour rectangulaire.

Quant à la faible variation de la résistance, pour une

modification d'une certaine étendue du contour de l'aile, qui permet dans cette zone l'application de la formule (33ᵃ), elle est due à ce que, pour l'aile à contour elliptique, la résistance est minimum et n'éprouve que de faibles variations au voisinage de ce minimum.

Fig. 45.



Polaires de l'aile $\frac{1}{5}$ déduites par le calcul des polaires d'essais :

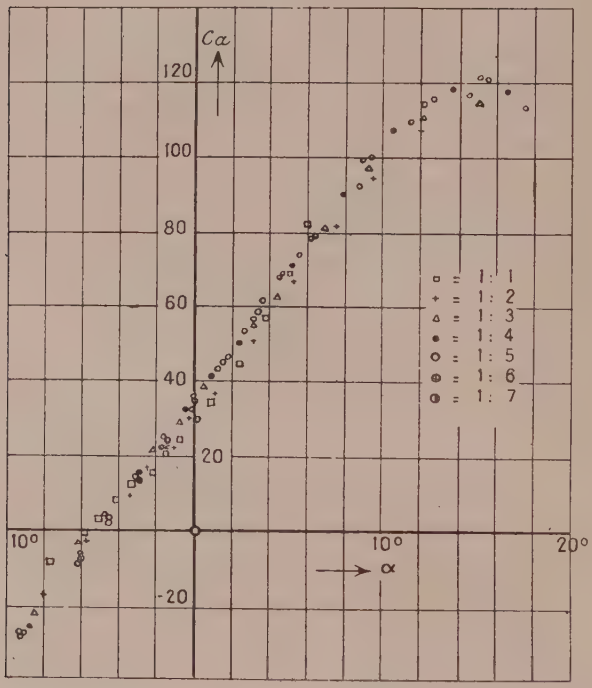
$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}.$$

c_a = coefficient de portance; c_w = coefficient de résistance; α = angle d'attaque.

Vérifications expérimentales des formules. — Les figures 43 et 44 représentent, d'après les résultats des essais exécutés au laboratoire aérodynamique de Göttingen, les courbes polaires et la variation du coefficient de portance avec l'incidence pour sept ailes dont les rapports de la profondeur à l'envergure varient de $\frac{1}{7}$ à $\frac{1}{1}$.

Les figures 45 et 46 représentent les mêmes éléments pour l'aile ayant la valeur particulière $\frac{1}{5}$ du rapport de la profondeur à l'envergure déduits, par le calcul, à l'aide des formules de transformation (31^a) et (33^a) des résultats des essais des

Fig. 46.



Variation du coefficient de portance en fonction de l'angle d'attaque pour l'aile $\frac{1}{5}$ déduite par le calcul des essais effectués dans les ailes :

$$\frac{1}{7},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1}.$$

c_a = coefficient de portance; c_w = coefficient de résistance;
α = angle d'attaque.

autres ailes. On aperçoit aisément combien toutes les valeurs calculées sont voisines des valeurs déterminées directement pour cette aile par l'expérience. L'aile de forme carrée donne la vérification la moins satisfaisante; on peut même s'étonner qu'elle fournisse déjà une telle approxima-

tion car on pourrait à bon droit hésiter à lui appliquer les formules de comparaison qui supposent la profondeur des ailes comparées faible par rapport à leur envergure.

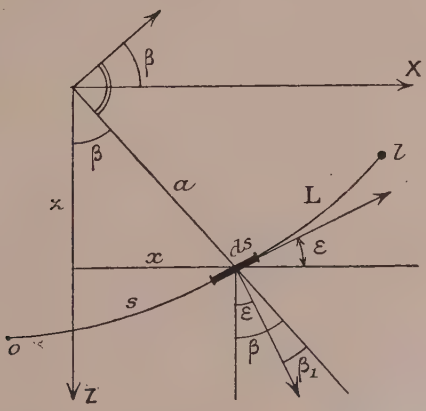
III. — Multiplans.

6. Dans la théorie linéaire ou théorie du premier ordre, un multiplan est figuré par un système de lignes portantes ou « système portant », chacune d'entre elles étant liée à une nappe de tourbillons libres qui peut dans certains cas se réduire à deux tourbillons marginaux.

Considérons une ligne portante L le long de laquelle la distribution de la portance (ou de la circulation) suit une loi arbitraire, mais aux extrémités de laquelle la portance (ou la circulation) est nulle. Supposons cette ligne entièrement contenue dans un plan de profil XZ perpendiculaire à la direction de vol et déterminons en un point A la composante w suivant Z de la vitesse de perturbation provoquée par la ligne L.

Les tourbillons liés de L n'ont pas d'influence sur w. Cette composante est entièrement due aux tourbillons libres

Fig. 47.



de L perpendiculaires, suivant les hypothèses de la théorie, au plan XZ. On a donc

$$w = -\frac{1}{4\pi}\int_0^l \frac{d\Gamma}{ds}\,\frac{\sin\beta}{a}\,ds. \tag{34}$$

En intégrant par parties et remarquant qu'aux extrémités de la ligne L la circulation Γ est nulle,

$$w = \frac{1}{4\pi}\int_0^l \Gamma \frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\beta}{a}\right) ds. \tag{35}$$

Or

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\sin\beta}{a}\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{x}{a^2}\right)$$

$$= \cos\varepsilon \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{a^2}\right) - \sin\varepsilon \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{x}{a^2}\right) = \frac{1}{a^2}\cos(2\beta - \varepsilon),$$

d'où

$$w = \frac{1}{4\pi}\int_0^l \frac{\Gamma\cos(2\beta-\varepsilon)}{a^2} ds. \tag{36}$$

7. *Résistance d'induction mutuelle de deux lignes portantes situées dans le même plan de profil* (1). L'équation (36) permet de calculer cette résistance due pour chacune des ailes à la présence de l'autre.

Soit w_{12} la composante de la vitesse de perturbation produite par la ligne portante 2 en un point de la ligne portante 1 dans le plan de profil et normalement à cette ligne. Cette vitesse est la cause d'une résistance W_{12} éprouvée par l'aile 1 à cause du voisinage de l'aile 2 et donnée par l'équation (5)

$$W_{12} = \rho \int \Gamma_1 \, ds_1 w_{12}; \tag{37}$$

W_{12} se calcule par la formule (36) où l'on fait $\beta - \varepsilon = \beta_1$ et $\beta = \beta_2$, d'où

$$W_{12} = \frac{\rho}{4\pi}\int_0^{l_1}\int_0^{l_2} \frac{\Gamma_1\Gamma_2\cos(\beta_1+\beta_2)\, ds_1\, ds_2}{a^2}. \tag{38}$$

De la symétrie de cette expression on déduit immédiatement que

$$W_{12} = W_{21}. \tag{39}$$

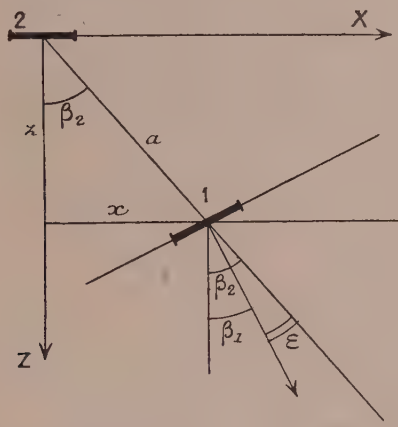
Cette relation établie par M. Munk ne suppose pas que les éléments portants considérés appartiennent pour chaque

(1) *Cf.* PRANDTL, *Tragflügeltheorie*. II. Mitteilung, p. 109-115.

catégorie à une aile unique. On peut donc exprimer la loi générale suivante :

« Si l'on décompose arbitrairement un système portant, dont tous les éléments sont contenus dans un même plan de

Fig. 48.



profil (normal à la direction de vol), en deux groupes, la résistance partielle que le groupe 1 éprouve par suite du champ de vitesses du groupe 2 a même valeur que celle éprouvée par le groupe 2 dans le champ de vitesses du groupe 1. »

On peut faire sur les équations (36) et (38) les remarques suivantes :

1° La résistance d'induction mutuelle de deux ailes placées l'une au-dessous de l'autre est positive, celle de deux ailes placées l'une à côté de l'autre est négative. Dans le premier cas il y a augmentation de la résistance totale par rapport au cas de deux ailes très éloignées, dans le second cas il y a diminution de la même résistance.

2° L'intégrale (38) exprime que la résistance d'induction mutuelle de 2 sur 1 est la somme des effets sur chaque élément de 1 de toutes les queues de tourbillons libres attachées à chacun des éléments de 2.

3° L'équation (36) est dénuée de sens si l'on fait $a = 0$ car elle prend la forme indéterminée $\infty - \infty$; les équations (36)

et (30) ne peuvent donc servir au calcul de la vitesse W_n due à une aile en un point de celle-ci, ni à celui de la résistance induite de cette aile. Pour effectuer le calcul de W_n on peut avoir recours à la relation (34) où il suffit de prendre la valeur principale de l'intégrale.

Pour lever l'indétermination des formules (36) et (38) pour $a = 0$, il suffit de supposer deux ailes très voisines et de prendre la limite de w et de W_{12} lorsqu'on fait tendre a vers zéro. La relation (39) qui est toujours vraie l'est encore à la limite et l'on en déduit que :

« Dans le cas de deux systèmes portants quelconques dont les dispositions géométriques possèdent une partie en coïncidence dans l'espace, on a encore $W_{12} = W_{21}$. »

8. *Résistance d'induction mutuelle de deux systèmes portants quelconques.* — Soit un élément portant situé dans un plan de profil et ses deux tourbillons marginaux rectilignes perpendiculaires à ce plan. Ces deux tourbillons composent ce que nous nommerons la queue de tourbillons libres de l'élément.

Prenons pour axe des X et des Y les directions de l'élément ds et de ces tourbillons.

Au point $A(x, y, z)$, le tourbillon T engendre une vitesse

$$\frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^\infty \frac{\sin\varphi\, dy'}{r'^2} = \frac{\Gamma}{4\pi}\int_0^\infty \frac{dy'\, a}{r'^3} = \frac{\Gamma}{4\pi a}\left(1+\frac{y}{r}\right)$$

dont les composantes sont

$$u = \frac{\Gamma x}{4\pi a^2}\left(1+\frac{y}{r}\right), \qquad v = 0, \qquad w = -\frac{\Gamma z}{4\pi a^2}\left(1+\frac{y}{r}\right).$$

Le couple des deux tourbillons T et T' engendre un champ de vitesses dont les composantes au point A ont pour valeur

$$du_1 = -\frac{\partial u}{\partial x}\,ds, \qquad dv_1 = 0, \qquad dw_1 = -\frac{\partial w}{\partial x}\,ds.$$

Il faut ajouter la vitesse élémentaire due au tourbillon transversal ds

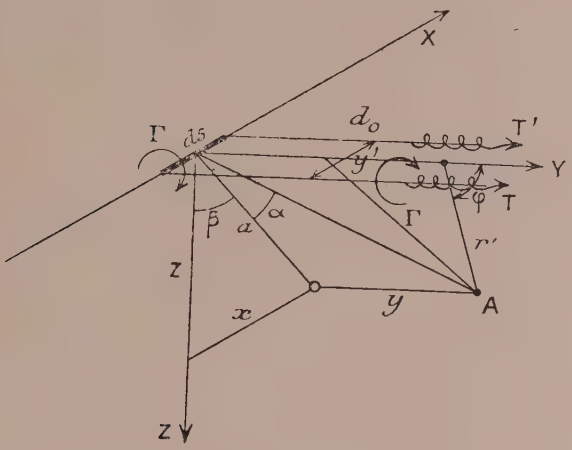
$$du_2 = 0, \qquad dv_2 = -\frac{\Gamma\, ds}{4\pi}\,\frac{z}{r^3}, \qquad dw_2 = \frac{\Gamma\, ds}{4\pi}\,\frac{y}{r^3}.$$

Au total, le champ de vitesses dû à un élément ds et à sa queue de tourbillons est caractérisé en un point A quelconque par une vitesse de composantes du, dv, dw

$$(40)\quad \begin{cases} du = \dfrac{\Gamma\, ds}{4\pi}\left[(1+\sin\alpha)\,\dfrac{\sin 2\beta}{a^2} + \dfrac{\sin\alpha\sin 2\beta)}{2r^2}\right], \\ dv = -\dfrac{\Gamma\, ds}{4\pi}\,\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{r^2}, \\ dw = \dfrac{\Gamma\, ds}{4\pi}\left[(1+\sin\alpha)\dfrac{\cos 2\beta}{a^2} + \dfrac{\sin\alpha\cos 2\beta}{r^2}\right]. \end{cases}$$

Pour les calculs relatifs à l'angle d'attaque et à la résistance, il est nécessaire de déterminer la composante de cette

Fig. 49.



vitesse suivant la direction normale à la ligne de vol et à l'élément portant influencé.

Supposons que cet élément 1, également situé dans un plan de profil, soit incliné d'un angle ε sur la direction des X, on a

$$dw_n = dw\cos\varepsilon + du\sin\varepsilon,$$

$$(41)\quad dw_n = \frac{\Gamma\, ds}{4\pi}\left[(1+\sin\alpha)\,\frac{\cos(2\beta-\varepsilon)}{a^2} + \frac{\sin\alpha\cos\beta\cos(\beta+\varepsilon)}{r^2}\right].$$

La résistance éprouvée par l'élément 1 à cause du champ de vitesses de l'élément 2 a pour valeur

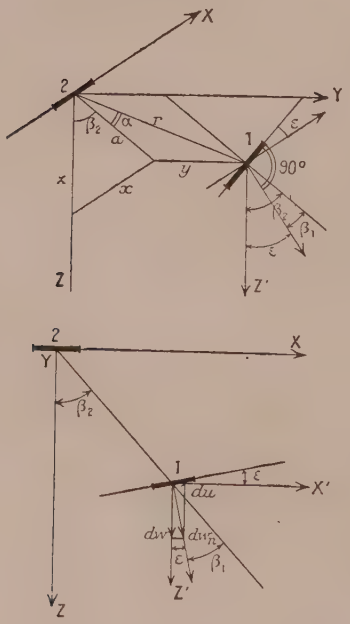
$$d^2 W_{12} = \rho\,\Gamma_1\, ds_1\, dw_n$$

ou, en remplaçant $(\beta - \varepsilon)$ par β_1 et β par β_2,

$$(42)\quad d^2W_{12} = \frac{\rho\Gamma_1 ds_1 \Gamma_2 ds_2}{4\pi} \times \left[(1+\sin\alpha)\frac{\cos(\beta_1+\beta_2)}{a^2} + \frac{\sin\alpha\cos\beta_1\cos\beta_2}{r^2}\right].$$

La résistance éprouvée par l'élément 2 à cause du champ de vitesses de l'élément 1 s'obtient en remplaçant dans la

Fig. 50.



formule précédente α, β_1 et β_2 par $\alpha - \pi$, $\beta_2 + \pi$ et $\beta_1 + \pi$. On a donc

$$(42^a)\quad d^2W_{21} = \frac{\rho\Gamma_2 ds_2 \Gamma_1 ds_1}{4\pi} \times \left[(1-\sin\alpha)\frac{\cos(\beta_2+\beta_1)}{a^2} - \frac{\sin\alpha\cos\beta_2\cos\beta_1}{r^2}\right].$$

On ne peut avoir égalité de ces résistances d'induction mutuelle des éléments 1 et 2 que si $\alpha = 0$, c'est-à-dire si les

deux éléments sont dans le même plan de profil. On retrouve dans ce cas l'élément de l'intégrale (38)

$$d^2 W_{12} = d^2 W_{21} = \frac{\rho \Gamma_1 \Gamma_2 \, ds_1 \, ds_2 \cos(\beta_1 + \beta_2)}{4\pi a^2}.$$

Dans le cas général, la somme $d^2 W_{12} + d^2 W_{21}$ est indépendante de α. En intégrant pour deux groupes d'éléments portants on obtient la somme des résistances d'induction mutuelle

$$(43) \qquad W_{12} + W_{21} = \frac{\rho}{2\pi} \int_1 \int_2 \frac{\Gamma_1 \Gamma_2 \, ds_1 \, ds_2 \cos(\beta_1 + \beta_2)}{a^2}.$$

Cette somme est indépendante du décalage des deux groupes d'éléments portants, décalage évalué suivant la direction de vol. Comme les résistances induites propres à chaque aile sont aussi indépendantes de cette grandeur, on peut énoncer la proposition suivante due à M. Munk :

« La résistance totale d'un système portant quelconque demeure invariable si l'on déplace les uns par rapport aux autres et suivant la direction de vol les éléments portants sans modifier leurs portances. »

Cette condition signifie qu'en modifiant le décalage longitudinal d'un élément, il faut modifier son angle d'attaque pour que l'altération de la composante w_n de la vitesse de perturbation normale à l'élément qu'entraîne le déplacement de ce dernier ramène à sa valeur primitive l'angle d'attaque efficace α' de l'élément et par suite maintienne sa portance invariable.

La raison fondamentale de l'indépendance de la résistance induite totale et du décalage longitudinal est que le travail de cette résistance, égal à l'énergie cinétique des tourbillons libres, est indépendant du décalage longitudinal de ces tourbillons parallèles à la direction de vol et ne dépend que de la distribution de leur champ dans un plan de profil.

Les règles précédentes de calcul des résistances d'induction mutuelle s'appliquent aussi à des ailes en flèche ou obliques par rapport à la direction de vol : il suffit à cet effet de les considérer comme formées d'éléments décalés « en escalier ».

Des difficultés particulières interviennent dans le calcul des résistances induites propres pour des ailes de cette sorte et rendent nécessaire d'envisager, pour mener à bonne fin ce calcul, la répartition des forces de portance non seulement suivant l'envergure de l'aile, mais encore dans chacune de ses sections suivant la profondeur.

Si l'on suppose connue la distribution de la portance suivant l'envergure, pour chacune des ailes d'un système portant, l'application des équations (5) et (43) conduit pour l'expression de la résistance induite totale à une forme quadratique définie des portances totales des différentes ailes A_1, A_2, ..., A_n. Lorsque l'on a déterminé les coefficients de cette forme, il est facile de résoudre le problème de la répartition (A_1, A_2, ..., A_n) d'une portance totale donnée ΣA entre les ailes d'un système portant qui correspond au minimum de la résistance totale.

Les formules et les coefficients de Prandtl présentés ci-dessous se rapportent à un système portant composé de « monoplans droits » ayant un même plan de symétrie passant par la direction de vol et dont la distribution de portance individuelle est elliptique.

Dans ces conditions, la résistance d'induction mutuelle de deux ailes d'envergure b_1 et b_2, écartées de h suivant la normale à la direction de vol, a pour expression

$$W_{12} = W_{21} = \frac{\sigma A_1 A_2}{\pi q b_1 b_2}, \tag{44}$$

où σ est une fonction de $\frac{2h}{b_1 + b_2}$ et $\mu = \frac{b_2}{b_1}$. Le calcul numérique donne pour σ les valeurs suivantes :

Tableau I. — *Valeurs de* σ.

$\frac{2h}{b_1+b_2}$	0.	0,05.	0,1.	0,15.	0,2.	0,3.	0,4.	0,5.
$\frac{b_2}{b_1} = 1,0$..	1,000	0,780	0,655	0,561	0,485	0,370	0,290	0,230
» 0,8..	0,800	0,690	0,600	0,523	0,459	0,355	0,282	0,225
» 0,6..	0,600	0,540	0,485	0,437	0,394	0,315	0,255	0,210

Pour le cas particulier important $b_1 = b_2$ on peut prendre

pour σ la formule approchée

$$\sigma = \frac{1 - 0{,}66\frac{h}{b}}{1{,}055 + 3{,}7\frac{h}{b}}. \tag{45}$$

Ainsi pour un biplan d'envergure b_1 et b_2 ($b_2 < b_1$) et hauteur h la résistance induite totale est

$$W = \frac{1}{\pi q b_1^2}\left(A_1^2 - \frac{2\sigma}{\mu} A_1 A_2 - \frac{\mu^2}{\sigma^2} A_2^2\right). \tag{46}$$

Cette résistance totale passe par un minimum pour un rapport des portances A_1, A_2 tel que

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{\mu - \sigma}{\frac{1}{\mu} - \sigma};$$

et la valeur de ce minimum est

$$W_{min} = \frac{(A_1 + A_2)^2}{\pi q b_1^2} \frac{1 - \sigma^2}{1 - 2\sigma\mu - \mu^2}. \tag{47}$$

Dans cette formule, le premier facteur représente la résistance induite d'un monoplan d'envergure b_1 et de portance totale $A_1 - A_2$ et le second facteur est un coefficient toujours inférieur à 1 car, h étant positif, σ est toujours inférieur à μ.

Si l'on fait en outre varier l'envergure b_2, b_1 restant constant, le minimum minimorum de la résistance a lieu pour

$$b_2 = b_1, \qquad A_2 = A_1;$$

le deuxième facteur de l'équation (47) se réduit alors à

$$\frac{1}{2}(1 + \sigma).$$

Comparaison de deux systèmes portants. — Faisons correspondre à un système portant quelconque un monoplan équivalent, c'est-à-dire ayant une envergure égale à celle de l'une des surfaces du système et une portance égale à la portance totale de ce dernier. Désignons par χ le rapport de la résistance induite totale du système à celle de son monoplan équivalent.

L'utilisation des coefficients χ permet de comparer entre

eux deux biplans en comparant leurs monoplans équivalents suivant la méthode exposée au paragraphe 4. En faisant les mêmes hypothèses que dans ce cas et en supposant par conséquent deux biplans ayant même coefficient de portance c_a, en désignant par c_{w_1} et c_{w_2} leurs coefficients de résistance totale, on a

$$(48) \qquad c_{w_1} = c_{w_2} = \frac{c_a^2}{\pi}\left(\frac{\gamma_1 F_1}{b_1^2} - \frac{\gamma_2 F_2}{b_2^2}\right).$$

Cette formule suppose que le coefficient c_{w_0} de la résistance de profil a même valeur pour les biplans et les monoplans équivalents.

9. *Détermination de la forme d'une aile de multiplan.* — On suppose que la distribution de la portance sur cette aile est connue. Pour une aile isolée (monoplan) cette détermination fait l'objet du premier problème envisagé plus haut.

Dans le cas du multiplan, le voisinage d'autres ailes introduit une influence nouvelle. Cette influence est sensible pour les valeurs usuelles du rapport de la distance de deux ailes à leur profondeur.

Une aile de multiplan se trouve soumise à un courant qui, en son absence, au lieu d'être régulier et uniforme, serait incurvé par suite de la perturbation apportée dans ce courant par les autres ailes. C'est l'influence de cette « courbure » du courant en l'absence de l'aile considérée qu'il s'agit d'exprimer.

Par application du principe de superposition valable dans le domaine de la « théorie du premier ordre » on peut poser en principe que les actions de l'air sur une aile placée dans un courant incurvé sont identiques à celles d'un courant rectiligne sur une aile dont le profil s'obtiendrait en redressant simultanément celui de la première aile et le courant incurvé. Il n'y a à évaluer l'influence de cette courbure du courant, sur une aile à profil donné, qu'au point de vue de la modification qu'en éprouve sa portance par rapport à celle du même profil dans le courant rectiligne. Cette modification est du premier ordre. On néglige celle qui en résulte pour la résistance et qui est du second ordre.

En première approximation, la courbure des lignes de

courant peut se calculer sur l'emplacement de l'axe transversal de l'aile (nous nommerons ainsi le lieu des centres de gravité des sections de l'aile) en supposant les autres ailes remplacées par des lignes portantes.

En un point A où la composante de la vitesse perpendiculaire à cet axe et à la direction de vol et provoquée par les autres ailes est w_n, la courbure de la ligne de courant passant par ce point est sensiblement

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{V}\frac{\partial w_n}{\partial y}. \tag{49}$$

C'est sur cette approximation que sont basés les calculs des biplans de M. Betz. On étudie actuellement au laboratoire de Göttingen la recherche d'une solution plus précise de ce problème en tenant compte d'une part de la distribution de la portance suivant la profondeur pour les ailes influençantes et d'autre part de la variation de la courbure des lignes de courant sur tout l'emplacement occupé par l'aile influencée.

IV. — Systèmes portants de moindre résistance.

10. Nous supposerons que le système portant est sans décalage puisque la valeur de celui-ci suivant la direction de vol n'a aucune influence sur la valeur de la résistance induite totale.

Le système se trouve alors représenté schématiquement par un système de lignes portantes disposées dans un plan de profil.

Supposons que l'on modifie la distribution de la portance de ce système, la configuration géométrique, la vitesse et la portance totale du système restant inaltérées. Nous pouvons partager les éléments du système modifié en deux groupes :

1° Eléments du système primitif;

2° Éléments qui, superposés aux précédents, donnent le système modifié. Ce groupe constitue ce que nous appellerons les éléments de la variation du système.

En vertu de la relation générale établie précédemment, les

résistances réciproques d'induction mutuelle de ces deux groupes sont égales

$$W_{21} = W_{12}. \tag{39}$$

On a remarqué en effet que cette relation de réciprocité était applicable même si des éléments de l'un des groupes se trouvaient superposés dans l'espace à des éléments de l'autre groupe, ce qui se trouve réalisé ici.

Soit un élément de variation ds sur lequel s'exerce dans le système modifié une force δN normale à la direction de ds; soit w_n la vitesse de perturbation, normale dans le plan du système à cette même direction, qu'engendre le système primitif en un point de cet élément; la force δN donne lieu à une résistance supplémentaire W_{21} induite sur l'élément par le système primitif

$$W_{21} = \delta N \frac{w_n}{V}. \tag{50}$$

La variation totale de la résistance induite du système est double de cette valeur en raison de la loi de réciprocité (39).

11. *Relation caractéristique du système de moindre résistance* (1). — Soient deux éléments de variation ds_1, ds_2 situés dans le plan de profil du système, inclinés de ε_1 et ε_2 sur l'axe des X situé dans ce plan, supportant des efforts normaux δN_1, δN_2 (d'ailleurs non situés en général dans le plan du système puisqu'ils possèdent une composante normale à ce plan qui donne lieu à une variation de la résistance du système) et tels que la variation de portance du système provoquée par leur adjonction soit nulle

$$\delta N_1 \cos\varepsilon_1 + \delta N_2 \cos\varepsilon_2 = 0. \tag{51}$$

Le système étant supposé à résistance minimum, la variation première de celle-ci est nulle

$$\delta N_1 w_{n_1} + \delta N_2 w_{n_2} = 0. \tag{52}$$

Ces deux relations entraînent immédiatement

$$\frac{w_{n_1}}{\cos\varepsilon_1} = \frac{w_{n_2}}{\cos\varepsilon_2} = w_0. \tag{53}$$

(1) *Cf.* PRANDTL, *op. cit.*, p. 116.

Si l'on désigne d'une façon générale par ε l'inclinaison sur l'axe des X d'un élément du système de moindre résistance à configuration géométrique, vitesse V et portance totale données, par w_n la composante normale, dans le plan du système, à cet élément de la vitesse de perturbation engendrée par tous les autres éléments du système à l'endroit où se trouve l'élément considéré, la vitesse w_n et l'angle ε sont liés par la relation

$$w_n = w_\theta \cos\varepsilon. \tag{54}$$

Si tous les éléments portants sont parallèles, $\cos\varepsilon = 1$ et

$$w_n = w_\theta = \text{const.} \tag{55}$$

La vitesse w_n a même valeur pour tous les points de l'espace où il y a portance.

12. *Nappe cylindrique de tourbillons libres.* — Continuant à se donner la configuration géométrique d'un système portant, la vitesse V, la portance totale, on cherche la distribution de la portance qui correspond à un minimum de la résistance induite totale.

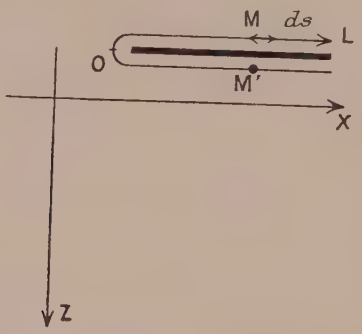
En un point du plan de profil du système, la vitesse de perturbation due au filet de tourbillons libres émanant d'un élément du système est égale à la moitié de la vitesse que produirait au même point un filet d'égale intensité ayant même axe, mais indéfini dans les deux sens. Pour un système portant sans décalage longitudinal on peut donc dire que le champ des vitesses u et w concorde dans le plan de profil du système, à un facteur 2 près, avec celui des vitesses qu'engendreraient dans ce plan les mêmes tourbillons libres prolongés jusqu'à l'infini en amont du système. En raison de l'absence de décalage, les tourbillons liés n'ont aucune influence sur les champs des u et w dans le plan de profil du système.

La détermination de ce champ se trouve donc ramenée, à un facteur 2 près, à la détermination du champ de vitesse dû à une nappe cylindrique de tourbillons libres dont les tourbillons forment les génératrices rectilignes et le contour du système portant la directrice. Ce problème est un problème plan. La condition (54) exprime la condition aux limites

pour un fluide au repos à l'infini dans lequel on déplace avec la vitesse constante $2w_0$ suivant l'axe des Z cette nappe cylindrique supposée indéformable (1).

Dans un plan normal aux génératrices, en dehors de l'intersection de la nappe par le plan, le mouvement du fluide est régi par un potentiel des vitesses.

Fig. 51.



Entre deux points M et M′ infiniment voisins de part et d'autre de la section d'une portion de la nappe par le plan (correspondant à la nappe de tourbillons libres d'une aile du système), on a

$$d\Gamma = (\overline{V}_{M'} - \overline{V}_M)\, ds = \left[\left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_{M'} - \left(\frac{d\Phi}{ds}\right)_M\right] ds = d[\Phi_{M'} - \Phi_M].$$

En intégrant $d\Gamma$, de l'extrémité O (où la circulation est nulle) au point courant M,

$$\Gamma = [\Phi]_M. \tag{56}$$

Le signe $[\Phi]_M$ représente la variation qu'éprouve le potentiel au point M en traversant la ligne L de M en M′.

Par unité de longueur suivant l'envergure, la réaction de l'air N normale à l'aile a pour valeur $\rho\Gamma V$, par suite, la portance totale d'une aile représentée par une ligne L dont les éléments ds sont inclinés de ε sur l'axe des X a pour

(1) *Cf.* PRANDTL, *op. cit.*, p. 117.

valeur

$$A = \int_L \rho V [\Phi]_M \cos\varepsilon \, ds = \rho V \int_L [\Phi] \, dx. \tag{57}$$

La résultante suivant l'axe des X de toutes les actions de l'air sur l'aile a pour expression correspondante

$$S = \int_L \rho V [\Phi]_M \sin\varepsilon \, ds = -\rho V \int_L [\Phi] \, dz. \tag{58}$$

Le courant étudié dans le plan de profil peut être transformé en un courant à régime permanent en communiquant au fluide et à la nappe cylindrique une vitesse égale et opposée $2w_0$ à celle de cet obstacle rigide qui se trouve ainsi ramené au repos. A l'infini, le fluide se trouve animé de cette vitesse $2w_0$ dans la direction de la portance. Dans ce cas, si la configuration géométrique du système portant est à connexion multiple, les lignes telles que L dans le plan de profil isolent des régions où le fluide est au repos comme les parois solides qui le contiennent. Dans ces régions, le potentiel a une valeur constante indéterminée, cette indétermination subsiste, quant à la variation du potentiel, à la traversée des lignes limitant ces régions d'eau morte.

La constante indéterminée que l'on peut ajouter à la valeur de cette variation du potentiel correspond à l'action d'une portance supplémentaire constante sur les lignes portantes entourant la région considérée, c'est-à-dire à l'addition d'une circulation supplémentaire constante autour de ces mêmes lignes. Elle ne donne lieu à aucune variation de la résistance induite, parce que le mouvement supplémentaire correspondant du fluide ne donne naissance à aucun tourbillon libre (circulation constante sur un circuit fermé).

On peut donc ajouter une force normale constante sur tous les éléments d'un système portant en anneau fermé sans provoquer de variation de la portance (puisque la résultante est nulle, cette force normale étant au second ordre près partout contenue dans le plan de profil du système) ni de sa résistance.

Soit Φ le potentiel du mouvement permanent dans le plan normal à la nappe cylindrique envisagée, appelons potentiel réduit la quantité $\frac{\Phi}{2w_0} = \varphi$. Cette quantité a les dimensions

d'une longueur et l'intégrale $\int [\varphi]\, dx$ celles d'une surface. On peut écrire pour le système de moindre résistance

$$A = \rho V . 2 w_0 F',$$

$$w_0 = \frac{A}{2 \rho V F'}. \tag{59}$$

La résistance induite totale a pour valeur

$$W = \int \frac{w_n}{V} \rho V [\varphi]\, ds = w_0 \int \rho V [\varphi]\, ds \cos\varepsilon = \frac{w_0}{V} A, \tag{60}$$

ce qui, en tenant compte de (59), peut s'écrire

$$W = \frac{A^2}{2 \rho V^2 F} = \frac{A^2}{4 q F'}, \tag{61}$$

ce qui conduit, pour les coefficients sans dimensions $c_a = \frac{A}{qF}$ et $c_{w_i} = \frac{W}{qF}$, à la relation

$$c_{w_i} = \frac{c_a^2 F}{4 F'}. \tag{62}$$

13. *Production instantanée du champ des vitesses dans les plans de profil.* — A une assez grande distance en arrière de l'aile, le champ des vitesses dans un plan de profil est à peu près indépendant de la position de ce plan de profil et tend, à une distance croissante du système, vers des valeurs doubles des valeurs correspondantes dans le plan du système. Il tend par suite à coïncider avec le champ des vitesses dans un plan normal aux génératrices de la nappe cylindrique envisagée précédemment.

Les particules situées en aval du système ne tendent à acquérir ces vitesses qu'avec un certain décalage dans le temps dû au fait qu'elles subissent successivement la même influence de la part du système à mesure que celui-ci se déplace sur sa trajectoire.

On peut imaginer que l'on communique instantanément à toutes les particules situées à l'aval du système les vitesses qu'elles tendent ainsi à acquérir. Il suffit pour cela d'exercer une percussion convenable sur la nappe cylindrique considérée comme une surface matérielle. Si le système portant

est un système de moindre résistance, la percussion fait varier instantanément la vitesse de chaque point de cette surface de zéro à la valeur uniforme w_0 suivant l'axe des Z. La nappe cylindrique fonctionne donc comme une surface matérielle indéformable.

Si le système portant n'était pas de moindre résistance, la percussion exercée sur la surface de la nappe cylindrique serait accompagnée d'une déformation de cette surface.

La fiction de cette percussion permet de retrouver les formules établies pour le système de moindre résistance et de donner une interprétation physique de la surface F'.

Soient p la dépression par rapport à la pression à l'infini p_0 exercée par le fluide en un point du cylindre rigide, Φ la valeur du potentiel (primitivement constant dans tout l'espace) au même point à l'instant final de la percussion, $0 - \tau$ la durée de la percussion. En vertu d'un théorème connu de l'Hydrodynamique,

$$\int_0^\tau p \, d\tau = \rho \Phi.$$

La différence des impulsions des réactions exercées par le fluide, par unité de surface, sur les deux faces du cylindre

$$\int_0^\tau p \, d\tau = \rho [\Phi]$$

est équivalente, quant à l'effet produit (création du champ de vitesses), l'impulsion de la réaction N du fluide normalement à l'aile correspondante par unité de largeur suivant l'envergure pendant le temps où cette aile parcourt l'unité de longueur dans sa direction de vol ou, en d'autres termes, à l'impulsion des réactions de l'air sur l'aile correspondante par unité de surface de celle-ci pendant le temps de contact de cette unité d'aire avec les particules fluides qu'elle touche, c'est-à-dire à la quantité

$$N \frac{1}{V}.$$

Ces impulsions sont donc égales ou

$$N = \rho V [\Phi]. \tag{63}$$

Ceci montre que N est donné par la loi de Joukowski appliquée à l'élément d'aile localisé au point considéré, ce que l'on avait admis *a priori* pour arriver à l'équation (57).

Si l'on désigne par $w_1 = 2w_0$ la vitesse en fin de percussion du cylindre rigide, on peut écrire, d'après les équations (59) et (61),

$$A = \rho F' V w_1, \tag{64}$$

$$WV = A w_0 = \rho F' V \frac{w_1^2}{2}. \tag{65}$$

Regardant alors F′ comme une aire du plan du système portant que l'on peut appeler « section transversale équivalente du système », la quantité $\rho F' V$ représente la masse fluide qui traverse cette aire par unité de temps, et la portance et la résistance du système se trouvent avoir les mêmes valeurs que si l'influence de cette aire F′ était telle que son passage communiquât, à toutes les particules qui la traversent, une vitesse de descente w_1 sans modifier la vitesse des particules qui passent en dehors de l'aire F′.

14. *Comparaison de différentes formes de systèmes portants.* — Dans ce qui précède, nous avons étudié les systèmes portants de moindre résistance à configuration géométrique et portance totale données. Nous allons maintenant chercher comment varie cette résistance minima lorsque l'on modifie la configuration du système.

La suppression d'éléments d'un système portant de moindre résistance, effectuée en maintenant invariable la portance totale de celui-ci, a pour effet d'augmenter en général la résistance induite totale de ce système. En effet, la suppression d'éléments du système correspond à une distribution de la portance dans le système primitif attribuant une portance nulle aux éléments supprimés. Cette distribution diffère de la distribution initiale correspondant à la résistance minima et ne possède pas par suite le même caractère. La résistance induite qu'elle entraîne est donc supérieure à la résistance minima et la modification apportée augmente bien la résistance induite du système primitif.

Il n'y a d'exception à cette règle que si la distribution de la portance correspondant à la résistance minima pour le

système primitif attribue effectivement une portance nulle aux éléments supprimés.

On démontrerait de la même manière que, partant d'un système de moindre résistance et maintenant invariable sa portance totale, l'adjonction de nouveaux éléments portants diminue la résistance induite totale du système.

Partant d'un système portant en anneau fermé de moindre résistance, pour une valeur donnée de la portance totale, on peut lui ajouter sur un circuit fermé empruntant une partie de sa périphérie et traversant l'aire qu'il limite, une portance unitaire constante sans altérer ni sa portance totale ni sa résistance. En supprimant ensuite des éléments convenables pour ne pas modifier la portance totale, la valeur de la résistance induite se trouve augmentée en vertu du principe démontré ci-dessus.

Il est clair que par des adjonctions et suppressions de ce genre on peut passer du système initial à tous les systèmes de même portance totale dont tous les éléments sont intérieurs au système primitif ou du moins ne dépassent nulle part ses limites.

De tous ces systèmes, c'est le système primitif (en anneau fermé) qui possède effectivement la plus faible résistance à égalité de portance totale.

15. *Résultats numériques.* — La surface F′ peut se calculer, pour certaines formes de systèmes portants, en appliquant les méthodes fournies par l'Hydrodynamique.

1° Pour le monoplan droit d'envergure b (plaque plane), la surface F′ est égale à celle du cercle de diamètre b : $F' = \frac{\pi}{4} b^2$.

2° Pour un système portant circulaire (système en anneau fermé), la surface F′ est égale à $\frac{\pi}{2} b^2$, b désignant le diamètre du cercle portant.

Pour les systèmes suivants, il faut introduire les valeurs des intégrales elliptiques normales de première et seconde classe pour le module k : K, E et les intégrales normales complètes correspondantes $\overline{K}$, $\overline{E}$. Soient, en outre, K′, E′, $\overline{K'}$, $\overline{E'}$ les valeurs des intégrales correspondantes pour le module $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

D'après les calculs effectués par R. Grammel :

3° Pour un biplan droit formé de deux monoplans droits associés et d'égale envergure, le minimum minimorum de la résistance a lieu pour un rapport de l'entreplan h à l'envergure b donné par

$$\frac{h}{b} = \frac{8\pi}{2\,\mathrm{K}'}$$

et la section transversale équivalente F′ a pour valeur

$$\mathrm{F}' = \frac{\pi}{4} b^2 \delta^2 (1 + k^2 - 2\varepsilon^2).$$

Dans ces formules. le module k est supposé voisin de zéro et l'on a

$$\varepsilon^2 = \frac{\overline{\mathrm{E}'}}{\overline{\mathrm{K}'}}, \qquad t = \sqrt{\frac{1-\varepsilon^2}{1-k^2}}, \qquad \frac{1}{\delta} = \mathrm{E}'(t) - \varepsilon^2 \mathrm{K}'(t).$$

4° Pour un système portant rectangulaire, représentant un biplan muni aux extrémités latérales de cloisons verticales et dont la résistance induite minima est inférieure à celle de tout système inscriptible dans son cadre, ce minimum est atteint pour

$$\frac{h}{b} = \frac{\overline{\mathrm{E}} - k'^2 \overline{\mathrm{K}}}{\overline{\mathrm{E}'} - k^2 \overline{\mathrm{K}'}}.$$

La section transversale équivalente F′ est donnée par

$$\mathrm{F}' = \frac{\pi b^2 k'^2}{4 (\overline{\mathrm{E}'} - k^2 \overline{\mathrm{K}'})^2}.$$

5° Pour un monoplan d'envergure b présentant une fente médiane de largeur d, l'aire F′ est donnée par l'intégrale

$$\mathrm{F}' = 4 \int_{\frac{d}{2}}^{\frac{b}{2}} \Phi \, dx$$

où la fonction Φ est définie par

$$\Phi = \frac{b}{2} \left[\frac{\overline{\mathrm{E}}}{\overline{\mathrm{K}}} \mathrm{K}(t) - \mathrm{E}(t) \right],$$

t étant la variable auxiliaire

$$t=\sqrt{\frac{b^2-4x^2}{b^2-d^2}}$$

et le module k étant égal à $\sqrt{1-\left(\frac{d}{b}\right)^2}$.

K. Pohlhausen a effectué les calculs numériques correspondant aux cas 3°, 4° et 5°.

En désignant par χ le rapport de la résistance induite totale du système considéré à celle du monoplan équivalent, le Tableau suivant donne les valeurs de ce coefficient pour un biplan et pour un système rectangulaire, pour différentes valeurs du rapport $\frac{h}{b}$:

TABLEAU 2. — *Valeurs de* $\chi=\frac{\pi b^2}{4F}$.

$\frac{h}{b}$.	0,00.	0,05.	0,10.	0,15.	0,2.	0,3.	0,4.	0,5.
Biplan....	1,000	0,890	0,825	0,776	0,739	0,684	0,645	0,615
Rectangle.	1,000	0,865	0,787	0,728	0,680	0,601	0,545	0,500

Le biplan présente donc à envergure et portance égales une résistance inférieure à celle du monoplan. Le cadre rectangulaire portant est supérieur à tous deux, comme le fait prévoir la loi générale énoncée plus haut.

Pratiquement, on peut se contenter pour représenter χ des formules approchées suivantes :

Biplan :

$$\chi\sim\frac{1+1{,}63\frac{h}{b}}{1{,}027+3{,}84\frac{h}{b}}; \tag{66}$$

Rectangle :

$$\chi\sim\frac{1+0{,}45\frac{h}{b}}{1{,}045+2{,}8\frac{h}{b}}. \tag{67}$$

Quant au monoplan à fente médiane, on compare sa résistance à celle du monoplan formé par le rapprochement et la soudure des deux parties, donc d'envergure $(b-d)$. En désignant par γ le rapport de la première résistance à la

seconde, le Tableau suivant fait connaître les valeurs de ce coefficient pour différentes valeurs du rapport $\frac{d}{b}$:

TABLEAU 3. — *Valeurs de* $\chi = \frac{\pi}{4}\frac{(b-d)^2}{F'}$.

$\frac{d}{b}$	0,000.	0,001.	0,01.	0,0316.	0,1.	0,25.	0,5.	1,0.
χ...	1,000	1,312	1,480	1,612	1,763	1,896	1,975	2,000

Ces valeurs sont représentées approximativement par la formule

$$\frac{1}{\chi} = 1 - \frac{1}{2\sqrt{1 + 0{,}35\left(10\log\frac{b}{d}\right)^2}}. \qquad (68)$$

V. — Influence des parois et des surfaces libres aux limites du fluide.

16. En principe, les essais sur modèles réduits dans les souffleries aérodynamiques peuvent se classer en deux grandes catégories suivant la nature des limites de la veine (à vitesse uniforme en l'absence d'obstacle immergé) dont on mesure les réactions contre les maquettes reliées à des balances convenables.

1° Essais au tunnel, lorsque la veine est limitée par un cylindre rigide dont l'axe est parallèle à la vitesse générale du courant libre.

2° Essais en veine libre, lorsque la veine traverse librement l'atmosphère de la chambre d'expériences à pression uniforme.

L'étude de l'influence des parois du tunnel, dans le premier cas, des surfaces libres limitant la veine, dans le second, présente un intérêt considérable puisqu'elle permet, si on la fonde sur une théorie satisfaisante, de déduire des essais effectués au laboratoire aérodynamique sur modèles réduits les caractéristiques des éléments correspondants en vraie grandeur dans une atmosphère indéfinie.

Au laboratoire de Moscou, le professeur Joukowski utilisait un tunnel. En France, M. Eiffel, à Auteuil, et, en Allemagne,

le professeur Prandlt, à Göttingen, opèrent au contraire avec une soufflerie à veine libre.

Cherchons à déterminer la forme des conditions aux limites pour la veine guidée ou libre. Remarquons d'abord que, pour cette dernière, les hypothèses caractérisant la « théorie du premier ordre » conduisent à négliger les déformations des surfaces limites dues à l'immersion du modèle et à considérer la veine comme cylindrique, que le modèle y soit ou non immergé.

Disposons alors l'axe des Y suivant la vitesse du courant libre, c'est-à-dire l'axe de la veine, et, vers l'aval, l'axe des Z suivant la direction de la résultante des réactions de l'aile sur le fluide en mouvement, l'axe des X formant avec les précédents un trièdre trirectangle direct.

Pour la veine guidée, la condition aux limites exprime que la vitesse normale à la paroi du tunnel est nulle en tout point de celle-ci.

Pour la veine libre, la pression à la surface libre est égale à la pression p_0 à l'infini du courant libre, l'atmosphère ambiante étant supposée au repos et indéfinie.

Appliquant le théorème de Bernoulli à la ligne de courant venant de l'infini et passant par le point considéré de la surface libre limitant la veine, on peut écrire

$$p_0 + \frac{\rho}{2}[(V+v)^2 + u^2 + w^2] = p_0 + \frac{\rho}{2}V^2$$

ou

$$\rho V v + \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2}\rho = 0$$

ou négligeant les carrés des vitesses de perturbation u, v, w à côté de ces grandeurs, il reste

$$\rho V v = 0 \qquad (v = 0). \tag{69}$$

Telle est l'expression de la condition aux limites pour la veine libre.

Pour déterminer le champ des vitesses dans une veine influencée par une aile essayée et dont la vitesse du courant libre V est connue, nous supposerons que les surfaces rigides ou libres de la veine ne donnent naissance à aucun tourbillon.

Il suffit alors, pour obtenir la même répartition de vitesses

dans l'espace, d'imaginer que l'on superpose au champ de vitesses correspondant dans le fluide indéfini à l'aile donnée et à la même vitesse à l'infini, les deux champs suivants dérivant chacun d'un potentiel :

1° A l'extérieur de la surface limite de la veine le champ opposé à celui du fluide indéfini (ce qui annule la vitesse en tout point de cette région);

2° A l'intérieur de la même surface, le champ possédant sur la surface limite une vitesse normale à la paroi rigide, ou une vitesse de perturbation suivant l'axe des Y pour la paroi libre, opposée à la vitesse correspondante au même point du champ du fluide indéfini.

Cette application du principe de la superposition permet, dans le domaine de la théorie du premier ordre, une évaluation relativement facile de l'influence des parois rigides ou libres (1).

17. *Cas de la veine libre.* — Soit $\bar{v}$ la valeur de la composante suivant l'axe des Y de la vitesse de perturbation due à l'aile dans un fluide indéfini en un point de la surface limite de la veine, le symbole $\bar{g}$ désignant la valeur d'une grandeur g en un point de cette surface limite.

Soit Φ le potentiel superposé au mouvement du fluide indéfini à l'intérieur de la surface limite de la veine; on a en un point d'une génératrice de cette surface

$$-\bar{v} = -\frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial y}.$$

En intégrant le long de cette génératrice et remarquant qu'à l'infini amont, la vitesse v est nulle et le potentiel Φ uniforme et par exemple nul, il vient

$$\bar{\Phi}(y) = -\int_{-\infty}^{y} \bar{v}\, dy, \tag{70}$$

expression qui donne la valeur du potentiel complémentaire en tout point de la surface limite, puisque le champ correspondant au fluide indéfini et supposé connu fournit la valeur de $\bar{v}$.

(1) *Cf.* PRANDTL, *op. cit.*, p. 124 et suiv.

La détermination du potentiel dans l'espace intérieur à la surface limite de la veine est ainsi ramenée dans chaque plan de profil ($y = \text{const.}$) à la détermination d'une fonction harmonique et régulière dans une région finie du plan et dont on connaît les valeurs sur le contour de cette région. Ce problème, dit *problème plan intérieur de Dirichlet*, admet une et une seule solution, le potentiel Φ est donc bien déterminé.

Pour étudier l'influence des surfaces libres limitant la veine sur la résistance induite d'un système immergé, il suffit de résoudre ce problème plan pour le plan de profil du système portant que l'on peut toujours supposer sans décalage longitudinal.

L'influence totale des surfaces libres ne se compose, en effet, que de leur influence sur la résistance induite propre de chaque élément. La veine étant indéfinie dans les deux sens, on peut communiquer à un élément quelconque un déplacement final parallèlement à l'axe de la veine sans modifier la vitesse de perturbation due aux surfaces limites à l'endroit où se trouve localisé l'élément considéré. Par un déplacement convenable de chaque élément, on peut donc annuler tout décalage longitudinal du système portant essayé sans modifier la valeur de la résistance totale d'induction qu'il oppose au courant de la veine.

Dans le plan de profil du système portant à décalage ainsi annulé, la valeur périphérique du potentiel est donnée par

$$\overline{\Phi}_0 = -\int_{-\infty}^{0} \overline{v}\, dy. \tag{71}$$

Nous allons montrer que, pour le champ complémentaire déterminé par le potentiel Φ et correspondant à la présence des surfaces libres comme pour le champ dans le fluide indéfini, les valeurs u_1, w_1 des composantes de la vitesse d'agitation dans le plan de profil situé à l'infini aval sont exactement doubles des valeurs correspondantes u_0, w_0 dans le plan de profil du système portant. Les vitesses u_1, w_1 dérivent, en effet, du potentiel plan défini par

$$\overline{\Phi}_1 = -\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v}\, dy.$$

Or, la fonction $\overline{v}(y)$ est une fonction paire de y et l'intégrale $-\int_0^y \overline{v}\,dy$ une fonction impaire de y. On a donc bien

$$(72) \qquad \overline{\Phi}_1 = -\int_{-\infty}^{0} - \int_{0}^{+\infty} = -2\int_{-\infty}^{0} \overline{v}\,dy = 2\,\overline{\Phi}_0$$

et

$$u_1 = 2\,u_0, \qquad w_1 = 2\,w_0.$$

On peut remarquer, en outre, que si l'on ajoute au potentiel Φ celui des vitesses d'agitation provoquées par le système dans le fluide indéfini (potentiel qui, à l'encontre de Φ, possède des singularités correspondant aux tourbillons liés et libres à l'intérieur de la veine), on obtient un potentiel Ψ dont les valeurs périphériques sont déterminées par l'intégration, suivant les génératrices des surfaces libres, des valeurs périphériques de la vitesse d'agitation v du courant total de perturbation. La condition aux limites se traduit pour ce courant par

$$-\overline{v} + \overline{v} = 0,$$

c'est-à-dire par

$$\overline{\Psi} = \text{const.}$$

On en déduit que les lignes de ce courant total de perturbation (qui, superposé au courant uniforme de vitesse V, donne le courant réel de la veine) rencontrent normalement les génératrices des surfaces libres de la veine.

18. *Cas du tunnel ou de la veine guidée.* — Le potentiel du courant complémentaire du courant indéfini est déterminé par la valeur, donnée sur la surface limite, de sa dérivée normale à cette surface. Cette valeur est égale et opposée à celle correspondante pour le potentiel du courant indéfini. Comme dans le cas précédent, cette condition détermine entièrement le potentiel complémentaire puisque le problème de sa détermination est ramené, au point de vue mathématique, à un problème de Neumann intérieur qui, comme le problème de Dirichlet du même genre, admet une et une seule solution.

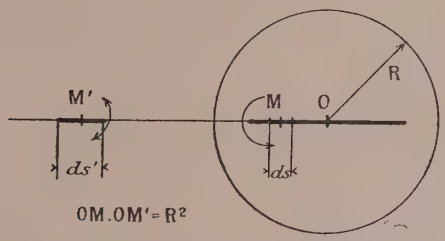
Comme dans le cas précédent, la valeur du décalage longitudinal du système portant ne peut modifier l'influence des parois sur la résistance induite totale du système. Cette

influence peut s'évaluer en déterminant le champ de vitesses dans le plan de profil du système sans décalage ou le champ de vitesses u_0, w_0 double du précédent, dans le plan de profil à l'infini aval.

19. *Détermination du champ des vitesses* u_0, w_0. — Pour résoudre ce problème, on peut appliquer la méthode des tourbillons-images.

Si la section de la veine libre ou guidée est circulaire, on fait correspondre à chaque tourbillon libre émis par le système portant un tourbillon extérieur à la surface de la veine, passant par le point inverse, par rapport au cercle de section de cette surface, du point formant l'origine du premier tourbillon et possédant une intensité tourbillonnaire opposée dans le premier cas ou égale dans le second à celle de ce tourbillon, cette intensité étant évaluée dans le trièdre-image du trièdre normal placé au siège du tourbillon-objet. A une bande de tourbillons libres de largeur ds et intensité $\frac{d\Gamma}{ds} ds$ émise par le système portant immergé dans la veine, la trans-

Fig. 52.



formation précédente fait correspondre une bande de tourbillons-images de largeur ds' et d'intensité $\frac{d\Gamma'}{ds'} ds'$ telle que

$$\frac{d\Gamma'}{ds'} ds' = \mp \frac{d\Gamma}{ds} ds.$$

En intégrant entre deux points du système image et les points correspondants du système initial, on obtient

$$\Gamma' = \mp \Gamma,$$

le signe — se rapportant à la veine libre pour laquelle les

lignes de courant du champ cherché u_0, w_0 sont toutes orthogonales au cercle de section de la veine, le signe + se rapportant au cas de la veine guidée où les lignes de courant correspondantes sont tangentes au cercle de section du tunnel.

20. *Résultats numériques.* — 1° Filet portant à distribution elliptique de la portance placé transversalement dans un plan méridien d'une veine libre à section circulaire.

Soient b l'envergure du monoplan, $D = 2R$ le diamètre de la veine, w' la composante de la vitesse d'agitation complémentaire due à la surface libre limite de la veine en un point du filet portant d'abscisse x.

Définissant la variable auxiliaire ξ par $\xi = \frac{2xb}{D^2}$, le calcul de w' conduit à l'expression suivante développée en série suivant les puissances croissantes de ξ :

$$(73) \qquad w' = \frac{A}{4\pi R^2 \rho V}\left(1 + \frac{3}{4}\xi^2 + \frac{5}{8}\xi^4 + \frac{35}{128}\xi^6 + \dots\right).$$

A cette vitesse w' correspond une résistance induite supplémentaire W' pour le monoplan qui mesure l'influence des limites du courant sur la résistance que lui oppose l'aile immergée. La valeur de W' est

$$(74) \qquad W' = \frac{A^2}{4\pi R^2 \rho V^2}\left[1 + \frac{3}{16}\left(\frac{b}{D}\right)^4 + \frac{5}{64}\left(\frac{b}{D}\right)^8 + \dots\right].$$

Si l'on suppose que la distribution de la portance sur le filet portant envisagé est rectangulaire au lieu d'être elliptique, on est conduit, pour l'expression de W', à un développement en série qui débute par le même terme. L'importance prédominante du premier terme permet de conclure que la forme de la distribution de la portance influe peu sur la valeur de la résistance induite supplémentaire.

En se limitant au premier terme, on est ainsi conduit à la formule approchée suivante pour la résistance totale d'un monoplan droit de section transversale équivalente F' placé au milieu d'une veine à section circulaire $F_0 = \pi R^2$:

$$(75) \qquad W = \frac{A^2}{4q}\left(\frac{1}{F'} + \frac{1}{2F_0}\right).$$

La majoration apportée à la résistance par les limites de la veine atteint déjà $\frac{1}{8}$ pour un rapport $\frac{b}{R} = \frac{1}{2}$. En appliquant la formule (74), plus précise parce qu'elle comprend les deux premiers termes du développement en série, cette majoration est estimée à 0,1262 pour la distribution elliptique au lieu de 0,125. La formule correspondant à la relation (74) pour une distribution rectangulaire, c'est-à-dire uniforme, de la portance suivant l'envergure de l'aile donne pour valeur de la majoration 0,127. Dans les deux cas, l'approximation fournie par la formule (75) est donc très satisfaisante.

Pour un canal de section circulaire, les résultats sont changés de signe; il y a une réduction de la résistance totale due à l'influence des parois du tunnel.

2° Aile à profil constant traversant une veine libre à section circulaire.

Aux deux points où l'aile franchit la surface limite de la veine, la différence des pressions sur les deux faces de l'aile s'annule, donc aussi la portance.

Pour évaluer la vitesse totale de perturbation, développons-la en série par rapport aux puissances croissantes du rapport $\lambda = \frac{R^2 - x^2}{R^2 + x^2}$, x étant l'abscisse d'une section transversale de l'aile et R le rayon de la veine. Ce développement ne comprend que des puissances impaires de λ, car la vitesse totale de perturbation $f(x)$ dans la veine est la même que si le fluide était indéfini et si l'on faisait correspondre à chaque élément de tourbillon situé à l'intérieur de la veine un élément situé à l'extérieur, réciproque du premier par inversion par rapport au cercle d'intersection de la veine par le plan de profil du premier élément, de même intensité et de sens opposé, ce sens étant rapporté au trièdre déduit par la même inversion d'un trièdre normal placé au siège du premier élément.

Il en résulte que la fonction $f(x)$ vérifie nécessairement la relation

$$f(x) = -f\left(\frac{R^2}{x}\right).$$

D'autre part, elle s'annule bien pour $x = \pm R$ puisque la fonction λ s'annule aux mêmes points.

Dans une section transversale de la partie immergée de l'aile considérée, la circulation Γ du fluide se développe évidemment suivant une série analogue.

M. K. Pohlhausen a donné l'expression suivante de $\Gamma(x)$, limitée au deuxième terme,

$$(76) \qquad \Gamma = VR\left[c_1\frac{R^2-x^2}{R^2+x^2} + c_2\left(\frac{R^2-x^2}{R^2+x^2}\right)^3\right]$$

et, pour la portance totale A de la partie immergée,

$$(77) \quad A = +\int_{-R}^{+R} \rho V\Gamma\, dx = \rho V^2 R^2\left[c_1(\pi-2) + c_2\left(\frac{3}{4}\pi - 4\right)\right].$$

La composante w de la vitesse totale de perturbation est

$$(78) \quad w = R^2 V\frac{R^2-x^2}{(R^2+x^2)^2}\left\{\frac{c_1}{2} + \frac{3}{4}c_2\frac{R^4-6R^2x^2+x^4}{(R^2+x^2)^2}\right\}.$$

La résistance induite totale de la partie immergée est

$$(79) \qquad W = \frac{\pi}{8}\rho V^2 R^2\left\{c_1^2 + \frac{3}{2}c_1c_2 + \frac{3}{4}c_2^2\right\}.$$

Le minimum de cette résistance W pour une portance totale A donnée, s'obtient pour

$$c_1 = 1{,}213\frac{A}{\rho V^2 R^2} \qquad \text{et} \qquad c_2 = -0{,}541\frac{A}{\rho V^2 R^2}$$

et a pour valeur

$$(80) \qquad W_{min.} = 0{,}277\frac{A^2}{\rho V^2 R^2} = 1{,}74\frac{A^2}{4qF_0}.$$

Cette résistance minima est 1,74 fois la résistance d'un monoplan d'envergure 2R dans le fluide indéfini.

La formule approchée (75) où l'on ferait $b = 2R$, ce qui entraîne $F' = F_0$, donnerait

$$(81) \qquad W_{min.} = 1{,}5\frac{A^2}{4qF_0}.$$

Pour ce cas extrême d'envergure d'une aile immergée, on voit que la formule (75) fournit une approximation encore assez satisfaisante.

Courant à deux dimensions limité par des surfaces

libres (*ou des parois rigides*). — Ce cas se présente, lorsque, pour déterminer les propriétés d'un profil d'aile, on essaye dans une veine libre un tronçon d'aile à profil constant limité à chaque extrémité latérale par deux cloisons parallèles de grande étendue.

Il faut alors tenir compte de la variation le long de la profondeur de l'aile de la vitesse de perturbation. En d'autres termes, on ne peut négliger dans ce cas l'incurvation du courant, au voisinage de l'aile, provoquée par les surfaces libres parallèles qui limitent le courant plan au-dessus et au-dessous de l'aile immergée.

Supposons que l'aile soit figurée par un tourbillon portant placé au milieu de la veine de hauteur h. Le champ des vitesses à l'intérieur de la veine restera le même si l'on suppose le fluide indéfini et que l'on y imagine répartis une infinité de tourbillons portants parallèles, disposés dans un même plan de profil, possédant la même intensité Γ et le même sens (en adoptant pour tous le même sens positif autour de leur direction), écartés de l'un à l'autre d'une distance égale à la hauteur h de la veine.

Ces tourbillons sont les images du tourbillon portant initial que l'on obtient par une succession indéfinie de réflexions de celui-ci alternativement sur chacun des plans parallèles à l'axe de la veine et qui forment les limites de cette dernière.

La vitesse de perturbation à l'infini aval du système en « grille indéfinie » ainsi constitué a pour expression

$$w_1 = \frac{A}{\rho V l h} = \frac{A}{\rho V F_0} \tag{82}$$

et la résistance induite de l'aile immergée dans la veine est

$$W = \frac{A w_1}{2V} = \frac{A^2}{2\rho V^2 F_0} = \frac{A^2}{4q F_0}. \tag{83}$$

Évaluons l'incurvation du courant de la veine au voisinage de cette aile. Dans le plan déterminé par la ligne portante figurant cette aile et par l'axe de la veine, la composante de la vitesse de perturbation a pour valeur

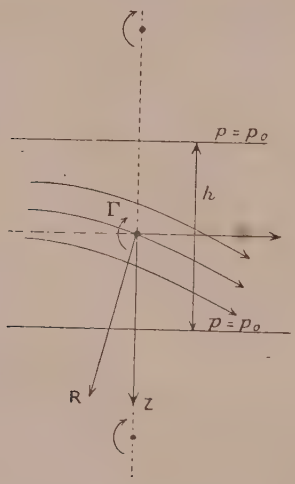
$$w = \frac{\Gamma y}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2 h^2 - y^2}. \tag{84}$$

Au voisinage de l'aile considérée, c'est-à-dire pour y petit cette formule peut s'écrire

$$(85) \qquad w \sim \frac{\Gamma y}{\pi^2 h^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6} \frac{\Gamma y}{h^2}$$

et la courbure de la ligne de courant correspondante dans la même région est le rapport de la différentielle de l'angle de

Fig. 53.



contingence de la ligne $\left(\text{assimilable à sa tangente } \frac{w}{V}\right)$ à celle du déplacement (assimilable à sa projection sur l'axe des Y), ce qui donne

$$(86) \qquad \frac{1}{R} \sim \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{w}{V}\right) = \frac{\pi \Gamma}{6 V h^2} = \frac{\pi A}{6 \rho V^2 l h^2} = \frac{\pi Ca F}{12 h^2}.$$

En vertu du principe de superposition, l'action du courant incurvé de vitesse V sur un profil donné dans les conditions précédentes (courant plan limité par des surfaces libres) est identique à celle d'un courant rectiligne de même vitesse sur un profil dont la courbure en chaque point serait déduite de celle du profil proposé au même point en la corrigeant de la courbure évaluée par la formule (86) du courant incurvé de la veine. La présence d'une résistance dans le courant plan

étudié est due à la rotation que l'incurvation précédente du courant entraîne pour la portance du profil. Celle-ci se trouve inclinée sur le plan de profil de l'aile d'un angle assimilable à sa tangente.

Dans le cas du courant plan dans un tunnel à section rectangulaire, les tourbillons-images, qu'il faut répartir dans le fluide indéfini pour obtenir après suppression des parois rigides limitant la veine le même champ de vitesses à l'intérieur de celle-ci, sont identiques à ceux du cas précédent. Mais leur sens de rotation est alternativement droit et gauche quand on passe d'un tourbillon du système en grille au suivant. A l'infini en aval de ce système, on a alors

$$w_1 = 0$$

et la résistance induite est nulle.

Le courant est cependant incurvé et la correction de courbure nécessaire, pour passer des essais en courant plan limité aux caractéristiques du profil en courant plan indéfini, est égale à la correction donnée par la formule (86) pour le cas de la veine plane et libre, mais doit être effectuée en sens contraire.

VI. — Les conditions à une grande distance à l'aval de l'aile.

21. Remarquons tout d'abord qu'avec les approximations de la théorie, les composantes u, v, w de la vitesse d'agitation d'une particule située à une grande distance de l'aile sont données par la sommation des vitesses élémentaires, évaluées par les formules (40) en tenant compte du fait que les rayons vecteurs joignant la particule considérée à deux éléments portants quelconques sont regardés comme parallèles et en remplaçant dans ces formules, pour un élément portant incliné de ε sur l'axe des X, l'angle β par $\beta - 2$.

Au cas où les éléments portants ne sont pas tous parallèles, l'axe des X dans le plan perpendiculaire à la vitesse V (plan de profil) est déterminé par la condition que la projection S suivant cet axe de la résultante des actions de l'aile sur le fluide soit nulle

$$S = \int \Gamma \, ds \sin \varepsilon = 0.$$

La pression en un point situé en dehors de la zone des tourbillons libres est exprimée, en régime permanent, par la formule de Bernoulli qui donne ici

$$(87) \qquad p_0 + \rho \frac{V^2}{2} = p + \rho[(V+v)^2 + u^2 + w^2]$$

et, négligeant u^2, v^2, w^2 à côté de v,

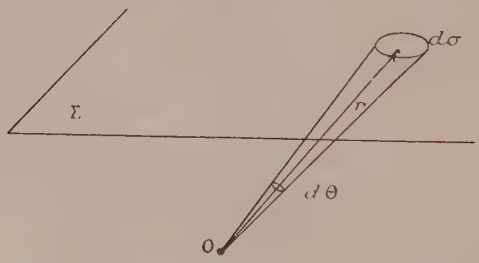
$$(87^a) \qquad p = p_0 - \rho V v.$$

Par rapport à la pression p_0 du courant libre à l'infini, il règne dans le fluide une dépression au-dessus de l'aile, une surpression au-dessous dont la valeur absolue à la cote z est

$$(88) \qquad \frac{\rho V}{4\pi} \int \Gamma \, dx \frac{\cos\alpha \cos\beta}{r^2} = \frac{A z}{4\pi r^3}.$$

Faisons la somme des surpressions élémentaires qui

Fig. 54.



s'exercent sur les éléments d'un plan de cote z. La force qui en résulte est

$$(89) \qquad N = -\int\int_{\Sigma} \frac{A}{4\pi} d\sigma \frac{z}{r} \frac{1}{r^2}$$

ou, en appelant $d\theta$ l'angle solide sous lequel on voit de l'origine O l'élément de surface $d\sigma$,

$$(89^a) \qquad N = -\int\int_{\Sigma} \frac{A}{4\pi} d\theta = -\frac{A}{2}.$$

Le fluide compris entre deux plans indéfinis, parallèles, de cotes z et $-z$ (z étant très grand), se trouve donc soumis, en dehors de la réaction de l'aile, à deux forces agissant sur les plans qui le limitent, une dépression pour le plan supérieur, une surpression pour le plan inférieur, par suite de même

sens et même valeur. La résultante de ces actions de pression sur les plans limites de la zone fluide considérée équilibre donc exactement la portance A de l'aile. En appliquant le théorème des quantités de mouvement à cette zone fluide, il faut en conclure que la quantité de mouvement verticale de cette zone fluide a une valeur constante. On voit ainsi que cette propriété, qui caractérise la masse totale du fluide indéfini lorsqu'on fait l'hypothèse de la permanence du régime de mouvement, s'étend ici à une portion quelconque du fluide comprise entre deux plans indéfinis parallèles au plan des XY et comprenant l'aile dans leur intervalle.

Si l'on suppose que le fluide, au lieu d'être indéfini en tous sens, soit limité au-dessous de l'aile par une paroi plane parallèle au plan des XY (cas du mouvement d'une aile parallèlement au sol et à son voisinage), la répartition des pressions dans l'espace se déduit de la précédente en appliquant la méthode des images. Rien ne sera changé, en effet, à la distribution des vitesses et des pressions, si, supposant le fluide indéfini et la paroi supprimée, on introduit dans le fluide des tourbillons-images quant à la direction, au sens et à l'intensité des tourbillons primitifs par rapport au plan de la paroi supprimée.

Un plan situé entre l'aile et le sol est donc soumis à une surpression totale égale à A puisqu'il est à la fois au-dessous de l'aile primitive et au-dessous par réflexion de son image. Au sol même, la résultante des actions de surpression est donc égale à la portance. Pour un plan situé au-dessus de l'aile primitive et par suite au-dessous par réflexion de son image, la dépression due à la première équilibre la surpression due à la seconde, et, par conséquent, tous les plans situés au-dessus de l'aile sont des plans où les dépressions et surpressions locales s'équilibrent.

La remarque faite plus haut pour la quantité de mouvement verticale du fluide compris entre un plan indéfini de la première espèce et un plan indéfini de la seconde s'applique ici pour les mêmes raisons.

Ainsi, la portance qui résulte pour une aile de son déplacement parallèlement au plan du sol se retrouve sur celui-ci en surpressions dans une zone plus ou moins étendue, ainsi qu'il est facile de le voir, suivant la proximité du sol. Cette

modification de la pression sur la surface du fluide se transmet instantanément dès que l'on déplace l'aile, le fluide étant incompressible. Si le fluide était compressible, la perturbation créée par le déplacement de l'aile se transmettrait avec la vitesse des ondes sonores dans le fluide.

22. *Distribution des vitesses et des pressions dans la zone des tourbillons libres à une grande distance de l'aile* (1). — Pour évaluer les vitesses u, v, w au voisinage de l'aile, nous avons pu négliger le mouvement propre des tourbillons libres et supposer que la nappe qu'ils forment gardait sur toute son étendue la forme et la distribution de tourbillons qu'elle possède à son origine. A une grande distance de l'aile cette approximation s'écarte trop de la réalité et il devient nécessaire de tenir compte de la déformation de la nappe.

Il faut distinguer deux sortes de mouvement des tourbillons de cette nappe :

1° D'une part, les bords latéraux de la nappe qui naissent aux extrémités de l'aile s'enroulent sur eux-mêmes symétriquement par rapport à la partie centrale. Les filets de tourbillons libres arrivent ainsi à se rapprocher des régions marginales de la nappe, puis à se tresser en une sorte de mèche tourbillonnaire, à la manière des brins d'une corde.

2° D'autre part, dans un même plan de profil, tous les points de la nappe sont animés d'une vitesse vers le bas.

Le phénomène d'enroulement des bords de la nappe a pour résultat de réaliser à l'infini aval une distribution de tourbillons assimilable à celle de deux noyaux cylindriques, de distribution intérieure uniforme, et symétriques par rapport au plan médian de l'aile. Autour de l'un de ces noyaux cylindriques, la circulation du fluide est égale à sa valeur autour de l'aile dans le plan médian.

Dans les noyaux, les lignes de tourbillons libres sont hélicoïdales. L'inclinaison sur l'axe du noyau, approximativement parallèle à l'axe des Y, que présentent ces hélices engendre à l'intérieur des noyaux une composante suivant cet axe de la vitesse de perturbation : soit v' cette composante supplémentaire. La vitesse d'une particule suivant l'axe des Y est

(1) *Cf.* PRANDTL, *op. cit.*, p. 131 et suiv.

alors $V + v + v'$, mais v, due uniquement aux tourbillons portants situés infiniment loin de la région considérée, peut être négligée.

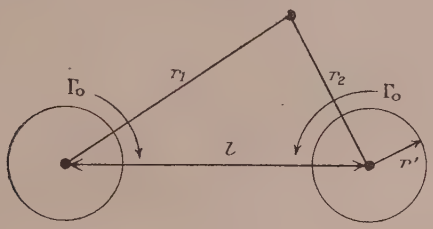
A l'infini en aval, il règne une pression p inférieure à la pression p_0. La valeur de cette dépression en un point situé à des distances r_1 et r_2 des axes des noyaux et extérieur à ceux-ci est, en négligeant v',

$$p_0 - p = \rho \frac{u^2 + w^2}{2}, \tag{90}$$

$$p_0 - p = \rho \frac{\Gamma_0^2}{8\Gamma^2} \frac{l^2}{x_1^2 - x_2^2}, \tag{91}$$

l désignant la distance des deux axes et Γ_0 la valeur commune de la circulation autour des noyaux.

Fig. 55.



A l'intérieur des noyaux, la dépression est influencée par la valeur de la composante supplémentaire v', vitesse que l'on peut négliger à l'extérieur des noyaux où les influences des lignes hélicoïdales, suivant l'axe des Y, se compensent approximativement au lieu de se renforcer.

Si l'on désigne par u' la vitesse à la périphérie du noyau de rayon r', la pente de l'hélice d'une ligne de tourbillons située à la surface du noyau a pour valeur

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{V}{u'} = \frac{V \cdot 2\pi r'}{\Gamma_0}. \tag{92}$$

Le pas de cette hélice est

$$H = 2\pi r' \cdot \frac{V}{u'} = 4\pi^2 r'^2 \frac{V}{\Gamma_0}. \tag{93}$$

Chacun des noyaux, et par suite le système entier des

tourbillons libres, se meut avec la vitesse verticale de descente

$$w' = \frac{\Gamma_0}{2\pi l}. \tag{94}$$

C'est ce mouvement de translation qui est la forme à l'infini aval du mouvement de descente de la nappe des tourbillons libres comme la disposition câblée des noyaux de tourbillons y est celle de la disposition enroulée de la nappe sur ses bords.

Dans un biplan à ailes identiques, à chaque aile correspondent deux noyaux à disposition hélicoïdale et de même circulation Γ_1. Ceux situés d'un même côté s'enroulent mutuellement en hélice et dans le sens de leur enroulement propre sur un cylindre dont le diamètre h est approximativement égal à l'entreplan. La projection de la vitesse de cet enroulement mutuel sur un plan de profil est approximativement

$$u_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi h}. \tag{95}$$

Le pas de l'hélice formée par chaque noyau est

$$H = 2\pi \frac{h}{2} \cdot \frac{V}{u_1} = 2\pi^2 h^2 \frac{V}{\Gamma_1} \tag{96}$$

et en un point de l'axe du cylindre sur lequel s'enroulent ces hélices, la composante v' de la vitesse de perturbation a pour valeur approchée

$$V' = \frac{2\Gamma_1}{2\pi \frac{h}{2}} \cdot \frac{u_1}{V} = \frac{\Gamma_1^2}{\pi^2 h^2 V}. \tag{97}$$

23. *Calcul de la traînée induite de l'aile.* — La traînée induite de l'aile dépend de l'énergie cinétique communiquée par l'aile au fluide, par unité de temps, c'est-à-dire de l'énergie cinétique du système de tourbillons.

Appliquons le théorème des quantités de mouvement, en projection sur l'axe des Y, au fluide compris entre l'aile et la surface d'un cylindre dont les génératrices parallèles à V sont très éloignées de l'aile et deux plans de profil l'un en amont, l'autre en aval. Soit dF un élément de surface de ce dernier plan. Faisons-lui correspondre par lignes de courant

un élément homologue de l'autre plan. La différence des pressions qui s'exercent sur ces deux éléments est donnée d'une façon générale par la relation (87)

$$(p_0 - p)\,d\mathrm{F} = \left[\rho \mathrm{V}.v' + \frac{\rho}{2}(v'^2 + u^2 + w^2)\right] d\mathrm{F}.$$

La variation de la quantité de mouvement, suivant l'axe des Y, de la masse fluide considérée pendant le temps dt est représentée par la différence des quantités de mouvement longitudinales des éléments fluides qui sortent de la surface limite ou y pénètrent pendant ce temps. Ces quantités se compensent sur la partie cylindrique de la surface. Les plans extrêmes fournissent la variation cherchée

$$-dt \int\int_{\Sigma} [\rho \mathrm{V}\mathrm{V} - \rho(\mathrm{V} + v')(\mathrm{V} + v')]\,d\mathrm{F},$$

l'intégrale étant étendue à la base aval du cylindre.

Le théorème des quantités de mouvement donne alors suivant l'axe des Y, et en appelant W la traînée induite cherchée,

$$-\mathrm{W}\,dt + dt \int\int_{\Sigma} \left[\rho \mathrm{V} v' + \frac{\rho}{2}(u^2 + v'^2 + w^2)\right] d\mathrm{F} = dt \int\int_{\Sigma} [2\rho \mathrm{V} v' + \rho v'^2]\,d\mathrm{F}.$$

En tenant compte de ce que, par suite de l'incompressibilité du fluide

$$\int\int v'\,d\mathrm{F} = 0, \tag{98}$$

lorsqu'on rejette à l'infini toutes les limites envisagées, on obtient dans ce cas, l'intégrale étant étendue à tout le plan de profil situé à l'infini aval,

$$\mathrm{W} = \frac{\rho}{2} \int\int (u^2 + w^2 - v'^2)\,d\mathrm{F}. \tag{99}$$

Si l'on tient compte, en outre, du fait que l'axe d'un noyau de tourbillons est incliné d'un angle δ sur l'axe des Y tel que $\sin\delta = \frac{w'}{\mathrm{V}}$ par suite du mouvement de descente du noyau,

la résistance induite est la projection de la force estimée précédemment et qu'une analyse plus serrée montre dans ce cas parallèle à l'axe des noyaux de tourbillons. On a donc

$$(99^a) \qquad W = \frac{\rho}{2} \cos\delta \iint (u^2 + w^2 - v'^2)\, dF$$

et la portance doit subir une correction correspondante

$$(100) \qquad A = \rho V \int \Gamma\, dx - W \operatorname{tang} \delta.$$

Dans la théorie linéaire, A étant du premier ordre, W du second, la correction $W \operatorname{tang} \delta$ est du troisième ordre et absolument négligeable en pratique.

Dans l'expression de la résistance on peut négliger la correction d'inclinaison des noyaux $\cos\delta$ et même le terme v'^2 d'ordre supérieur à $(u^2 + w^2)$. On obtient alors la formule approchée

$$(101) \qquad W = \frac{\rho}{2} \iint (u^2 + w^2)\, dF.$$

Cette équation permet d'obtenir, dans des cas simples, une évaluation approchée des dimensions des noyaux tourbillonnaires.

Imaginons, en effet, le monoplan à distribution elliptique de la portance et supposons qu'à l'infini aval les tourbillons libres soient répartis uniformément dans deux cylindres circulaires parallèles à V. Un calcul simple donne pour valeur de l'intégrale (101)

$$(102) \qquad W = \rho \frac{\Gamma_0^2}{2\pi} \left[\operatorname{Log} \frac{l}{r'} + \frac{1}{4} \right]$$

où l désigne la distance des axes des deux noyaux hélicoïdaux et r' leur rayon.

D'autre part, on sait que la résistance de ce monoplan peut s'exprimer par la relation

$$(28) \qquad W = \frac{2A^2}{\pi \rho V^2 b^2}.$$

La circulation Γ_0 autour d'un noyau hélicoïdal étant égale à la circulation médiane autour de l'aile de portance totale A et envergure b

$$\Gamma_0 = \frac{4}{\pi} \frac{A}{\rho V b},$$

on déduit de la comparaison de (102) et (28)

$$(103) \qquad \operatorname{Log}\frac{l}{r'} = (\pi^2 - 1) = 2,215 \quad \text{ou} \quad \frac{l}{r'} \sim 9,16.$$

D'autre part, l'impulsion de la portance pendant l'unité de temps est égale à la quantité de mouvement verticale due à une ligne tourbillonnaire fermée de circulation Γ_0 formant le contour de la surface balayée par une droite de profil reliant les deux noyaux de tourbillons, soit

$$A = \frac{\pi}{4}\rho V.b P_0 = \rho V.\, l\Gamma_0$$

ou

$$(104) \qquad l = \frac{\pi}{4} b.$$

Les quantités l et r' se trouvent ainsi déterminées.

Le pas des lignes de tourbillons hélicoïdales à la surface du noyau a pour valeur, en introduisant c_a et b à la place de Γ_0, l et r',

$$(105) \qquad H = 0,455 b^2.$$

Sur la normale commune aux axes des deux noyaux tourbillonnaires et en dehors de ceux-ci, la vitesse verticale w a pour valeur

$$(106) \qquad w = \frac{2\Gamma_0 l}{\pi(l^2 - 4x^2)}.$$

A l'intérieur des noyaux, cette vitesse varie suivant une fonction linéaire de x comme le champ magnétique dans un conducteur parcouru par un courant réparti uniformément dans sa section.

Au milieu de l'intervalle des deux noyaux, la valeur de w est

$$(107) \qquad w_2 = \frac{2\Gamma_0}{\pi l},$$

tandis qu'en négligeant le mouvement d'enroulement de la nappe des tourbillons libres et sa transformation en une paire de noyaux hélicoïdaux à rotation uniformément distribuée, cette valeur serait

$$(27) \qquad w_1 = 2w_0 = \frac{4A}{\pi\rho V b^2} = \frac{\pi\Gamma_0}{4l}.$$

En comparant, on a

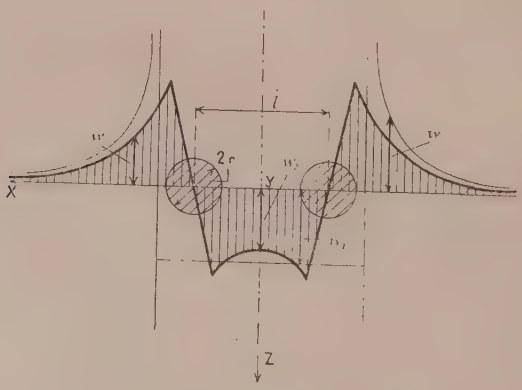
$$w_2 = \frac{8}{\pi^2} w_1. \tag{107a}$$

La figure 52 représente la distribution de la vitesse verticale w sur la parallèle à l'axe des X passant par l'infini aval sur l'axe des Y suivant qu'on tient compte ou non de l'enroulement de la nappe des tourbillons libres pour un filet portant à distribution elliptique. Dans le dernier cas, on sait que, sur l'axe des X, entre les filets marginaux de la nappe, la vitesse verticale w' est constante, qu'à l'extérieur de ces filets w' est donnée par

$$w' = -w_0 \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2}} - 1 \right)$$

et qu'à l'infini aval suivant l'axe des Y, les vitesses correspondantes ont une valeur double.

Fig. 56.



La distance de l'aile à partir de laquelle l'enroulement de la nappe de tourbillons libres n'est plus négligeable est d'autant plus grande que la vitesse w_1 est plus faible. Elle est de l'ordre de $\frac{lV}{2w_1}$.

L'écart qui existe entre les valeurs de w_1 et w_2 justifie l'étude détaillée du phénomène de l'enroulement de la nappe

des tourbillons libres pour l'évaluation précise de l'influence de ces tourbillons sur des gouvernes de profondeur notablement éloignées des ailes d'un avion.

VII. — Application de la théorie aux hélices (1).

24. *Théorème sur l'énergie perdue dans la propulsion.* — La conception de l'élément portant dans un courant libre rectiligne peut être étendue au cas d'un courant hélicoïdal.

Pour un élément de pale d'hélice, en admettant toujours l'existence d'un potentiel polytrope et de tourbillons libres étendus jusqu'à l'infini aval, la réaction de l'air est perpendiculaire à l'élément et à la vitesse c du courant libre, c'est-à-dire à la vitesse relative de l'élément en mouvement hélicoïdal dans l'air en repos et sa valeur, par unité de longueur suivant l'envergure de la pale, est

$$\rho \Gamma c.$$

Par unité de longueur, les tourbillons qui se détachent de la pale ont une intensité $\frac{d\Gamma}{dx}$.

La théorie linéaire de l'hélice est basée sur les approximations suivantes : On suppose, d'une part, que les réactions de l'air sont extrêmement petites, ainsi que les vitesses de perturbation, et, d'autre part, que les vitesses propres des tourbillons libres étant d'un ordre supérieur peuvent être négligées.

Les tourbillons libres s'enroulent, par suite, en hélice, sur des cylindres ayant même axe que le propulseur et la nappe de tourbillons dont on néglige la déformation a la forme d'un hélicoïde.

Cette configuration du champ des tourbillons libres rend évidemment plus difficile la détermination du champ des vitesses de perturbation. M. Betz a néanmoins établi, par des considérations analogues à celles présentées par M. Munk pour les systèmes portants, une série de théorèmes généraux pour l'hélice.

---

(1) Cf. *Report*, n° 116, *of the N. Adv. Com. f. Aeron*, p. 55.

Caractérisons une hélice par la différence entre l'énergie fournie et celle utilisée, c'est-à-dire par l'énergie perdue dans la propulsion. Cette perte correspond à l'énergie cinétique cédée au fluide et due au système des tourbillons engendrés par le propulseur.

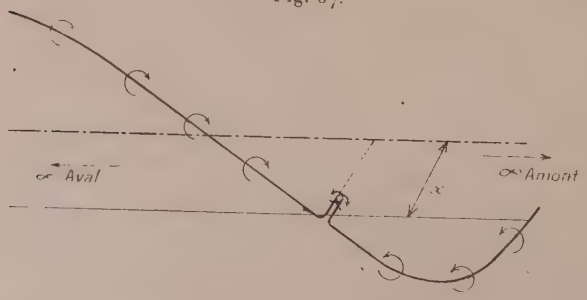
On peut énoncer les théorèmes suivants :

I. *Si deux éléments d'une pale sont situés sur le même rayon à des distances x et ξ de l'axe, l'énergie perdue au point ξ due à la vitesse de perturbation engendrée en ce point par l'élément situé en x est égale à l'énergie perdue au point x par suite de la vitesse de perturbation engendrée en ce point par l'élément situé en ξ.*

II. *Si deux éléments sont situés en x et ξ sur deux rayons différents, l'énergie perdue au point ξ par suite de la vitesse de perturbation engendrée en ce point par l'élément situé en x est égale à l'énergie qui serait perdue en x si le tourbillon hélicoïdal qui émane du point ξ était indéfini dans le sens amont au lieu de l'être vers l'aval, le sens de rotation du tourbillon transversal élémentaire étant supposé renversé.*

III. *L'énergie totale perdue par suite de l'influence mutuelle de deux éléments de pale situés à des distances x et ξ de l'axe est égale à l'énergie qui serait perdue en l'un des points si le tourbillon émanant de l'autre était indéfini, à la fois vers l'amont et vers l'aval.*

Fig. 57.



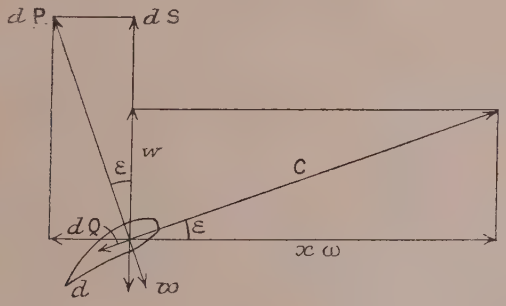
Ce dernier théorème conduit à une extension du théorème de la non-influence du décalage longitudinal sur la résistance

induite totale d'un système portant. En effet, d'une part, le tourbillon transversal élémentaire disparaît dans l'évaluation de la résistance totale d'induction mutuelle de deux éléments de pale puisque, dans l'extension du tourbillon hélicoïdal, le tourbillon transversal, complété par un tourbillon identique mais opposé, se trouve annulé, et, d'autre part, l'élément de pale peut être déplacé et amené en un point quelconque de son tourbillon hélicoïdal. On sait, d'ailleurs, que la perte totale d'énergie est équivalente à l'énergie cinétique du système des tourbillons libres et que celle-ci ne dépend que de la distribution finale de ce système et non des points de l'espace où prennent naissance les tourbillons libres sur les trajectoires hélicoïdales des éléments de pales.

Remarquons que, pour les systèmes portants, on peut énoncer une règle analogue pour la détermination de la résistance totale d'induction mutuelle de deux éléments. Puisque celle-ci est indépendante du décalage longitudinal, on peut rejeter à l'infini amont l'un des éléments : l'autre n'a alors aucune influence sur lui, puisque le champ d'un élément s'évanouit à l'infini dans le sens amont et la résistance cherchée se déduit de l'influence du tourbillon libre infini dans les deux sens sur l'élément maintenu en place.

IV. *Le champ des vitesses de perturbation caractérisant un propulseur à perte d'énergie minima est celui que l'on*

Fig. 58.



obtient en communiquant dans le fluide sans viscosité et en repos une vitesse donnée dirigée vers l'aval à la surface hélicoïdale décrite par le propulseur et supposée solidifiée.

La variation de potentiel à la traversée de cette surface est égale à la circulation Γ *autour de l'élément de pale correspondant.*

On peut démontrer ce théorème d'une façon simple.

Soient ω la vitesse angulaire, v la vitesse de translation du propulseur. En l'absence de tourbillons libres, la réaction de l'air serait une force $d\mathrm{P}$ normale à la vitesse relative c de l'élément par rapport à l'air en repos et donnée par la loi de Kutta-Joukowski,

$$d\mathrm{P} = \rho \Gamma c \, dx. \tag{108}$$

La composante de $d\mathrm{P}$ suivant l'axe du propulseur est

$$d\mathrm{S} = d\mathrm{P} \cos\varepsilon = \rho \Gamma x \omega \, dx. \tag{109}$$

S'il y a n pales, la traction exercée par l'hélice est

$$\mathrm{S} = \rho \omega \sum_{1}^{n} \int_{0}^{r} \Gamma x \, dx. \tag{110}$$

Le couple résistant dû à l'élément de pale considéré est

$$x \, d\mathrm{T} = x \, d\mathrm{P} \sin\varepsilon = \rho \Gamma v x \, dx, \tag{111}$$

et l'on a

$$d\mathrm{S} v = \omega x \, d\mathrm{T}. \tag{112}$$

L'énergie utilisée est alors égale à l'énergie fournie pour vaincre le couple résistant. Le rendement du propulseur est égal à l'unité. L'hypothèse que la force $d\mathrm{P}$ est perpendiculaire à la vitesse v de l'élément conduit donc à la théorie du propulseur parfait.

En fait, un propulseur comme une aile d'envergure finie ou de profil variable donne naissance à une nappe de tourbillons libres. L'énergie perdue par suite de ce mouvement tourbillonnaire est égale au travail de la composante $d\mathrm{Q}$ opposée à la vitesse c de la réaction du fluide sur l'aile modifiée par la présence des tourbillons libres et dépend de a composante w de la vitesse de perturbation perpendiculaire à la direction de la vitesse c. Cette résistance élémen-

taire a pour valeur

$$dQ = dP\frac{w}{c} = \rho\Gamma w\,dx. \tag{113}$$

L'énergie perdue par unité de temps et par élément de pale est, par suite,

$$dQc = \rho\Gamma\,dx\,wc = dP\,w. \tag{114}$$

La perte totale d'énergie a pour valeur

$$L = \rho v\sum_{1}^{n}\int_{0}^{r}\frac{\Gamma w\,dx}{\sin\varepsilon}. \tag{115}$$

Supposons que cette quantité soit minimum. Modifions de $\delta\Gamma_1$ et $\delta\Gamma_2$ la circulation autour de deux éléments de pale dx_1 et dx_2 situés en x_1 et x_2. La force totale de traction étant supposée invariable dans cette modification, sa variation est nulle :

$$\delta\Gamma_1 x_1\,dx_1 + \delta\Gamma_2 x_2\,dx_2 = 0. \tag{116}$$

La perte d'énergie entraînée par la même modification est, par hypothèse, nulle, puisqu'elle représente la variation de la perte totale autour de son minimum. On a donc

$$\delta\Gamma_1\frac{w_1}{\sin\varepsilon_1}dx_1 + \delta\Gamma_2\frac{w_2}{\sin\varepsilon_2}dx_2 = 0, \tag{117}$$

w_1 et w_2 étant les vitesses de perturbation normales à la trajectoire des éléments de pale engendrées par les tourbillons du propulseur initial, conformément au théorème III. Les deux dernières relations donnent

$$\frac{w_1}{x_1\sin\varepsilon_1} = \frac{w_2}{x_2\sin\varepsilon_2} = \text{const.} \tag{118}$$

La composante w_n de la vitesse d'une particule fluide suivant la normale à une surface hélicoïdale rigide déplacée dans le fluide avec une vitesse w' vers l'aval est liée à cette vitesse par la relation

$$w_n = w'\cos\varepsilon.$$

Si h désigne le pas de la trajectoire de l'élément x, on a

$$h = 2\pi x\tan\varepsilon$$

et l'expression de w_n peut s'écrire

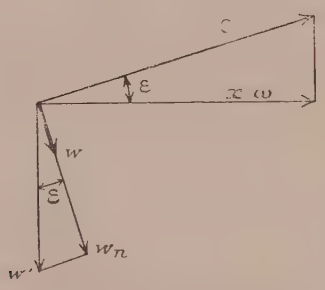
$$w_n = \frac{2\pi w' x \sin\varepsilon}{h},$$

ce qui permet de mettre la relation caractéristique d'un propulseur à perte d'énergie minima pour une traction et un mouvement du propulseur donnés sous la forme

$$\frac{w_n}{x \sin\varepsilon} = \text{const.}, \tag{119}$$

w_n désignant la vitesse du fluide suivant la normale à la surface hélicoïdale décrite par les pales du propulseur, que l'on

Fig. 59.



suppose rigide et déplacée vers l'aval avec une vitesse

$$w' = \frac{h}{2\pi}\,\frac{w_n}{x \sin\varepsilon} = \frac{h}{2\pi} \cdot \text{const.}$$

VIII. — Utilisation et avenir de la théorie.

Les problèmes étudiés dans les pages qui précèdent représentent les principaux résultats acquis par la forme dite *linéaire* de la théorie de Prandtl. Ce n'est là qu'une première étape dans la pensée même de son auteur. Le schéma du filet portant apparaît trop simplifié dans certains cas et l'introduction de la figuration d'une surface portante par une zone de tourbillons portants reproduisant la distribution de la portance de l'aile, à la fois suivant son envergure et sa profondeur, permettra d'étudier l'influence de la forme du profil sur la grandeur de la portance et la position de sa ligne

d'action, ainsi que l'influence précise de la courbure d'une aile sur les propriétés aérodynamiques d'autres ailes situées dans son voisinage.

On peut envisager l'application de la théorie à l'étude des surfaces portantes présentant une flèche dans le sens de la marche, de l'influence des propulseurs sur les surfaces, des propriétés des hélices, des turbines, des moteurs éoliens. L'étude des mouvements fluides à régimes périodiques permettra d'étendre la théorie à l'aile battante. Les calculs nécessités par l'étude de certains de ces problèmes ont été entrepris en Allemagne par le personnel technique du Laboratoire de Göttingen, sous la direction du professeur Prandtl, au cours même de la dernière guerre. Les difficultés des calculs et le manque de collaborateurs ont retardé la solution de ces problèmes.

Sans vouloir préjuger des résultats qu'escomptent les auteurs de la théorie de son application aux problèmes précédents, nous nous bornerons, en terminant, à faire deux remarques :

1° La théorie générale, exposée dans la première Partie, repose sur certaines hypothèses relatives à la forme de l'écoulement de l'air autour des surfaces portantes et soulève certains problèmes mathématiques qui n'ont pas encore fait l'objet d'une étude approfondie. Une critique rigoureuse de la théorie exigerait la discussion des expériences et des calculs qui ont suggéré ces hypothèses, ainsi que l'analyse de ces problèmes. Pareille critique sortant manifestement du cadre restreint de cette étude, dont le but est surtout de faire connaître l'état actuel de la théorie, ces questions n'ont fait l'objet ici que d'une brève mention, malgré le profond intérêt que présente leur étude.

2° Les simplifications apportées à la théorie générale et qui conduisent aux formules exposées dans la seconde Partie reçoivent, des essais faits au Laboratoire, une justification très satisfaisante. C'est ainsi, par exemple, qu'on peut, dès aujourd'hui, calculer, avec une approximation suffisante, les éléments de la résultante d'une voilure d'avion dont on s'est donné le profil en appliquant la théorie linéaire à la détermination de la résistance induite et de la correction de

l'incidence en fonction de la disposition et de l'allongement des ailes, la portance du profil choisi étant donnée en fonction de l'incidence par la théorie de Joukowski et la résistance de profil prise égale à la résistance de frottement. Il est juste, toutefois, de remarquer que les simplifications qui sont à la base de la « théorie linéaire » introduisent des indéterminées qui facilitent la mise en accord des formules déduites des considérations théoriques avec les résultats de l'expérience.

Cet accord, véritable critérium de la valeur et de l'utilité de toute théorie, suffit à motiver l'intérêt que présente celle-ci pour l'Ingénieur au moment où l'Art de la construction des avions, abandonnant les procédés purement empiriques, doit faire appel, de plus en plus, à la Science aérodynamique, à laquelle l'Hydrodynamique classique peut, seule, fournir des bases rationnelles.

BIBLIOGRAPHIE.

Z.F.M... *Zeitschrift für Flugtechnik und Motorluftschifffahrt.*
T.B..... *Technische Berichte der Flugzeugmeisterei.*
N.G.W... *Nachrichten der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen : Math.-Phys. Klasse.*
N.A.C... *National Advisory Committee for Aeronautics.* Washington.

I. — Mouvement des fluides.

1. Appell. — *Traité de Mécanique*, t. III (Paris, Gauthier-Villars et C^ie).
2. Basset. — *A Treatise on Hydrodynamics* (Cambridge, 1888).
3. Brillouin. — *Recherches récentes sur diverses questions d'Hydrodynamique* (Paris, 1891, Gauthier-Villars et C^ie).
4. Duhem. — Recherches sur l'Hydrodynamique (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 1901-1903).
5. Joukowski. — *Aérodynamique* (Paris, 1916, Gauthier-Villars et C^ie).
6. Kirchhoff. — *Vorlesungen über mathematische Physik* (Leipzig, 1883).
7. Lamb. — *Hydrodynamics.*
8. Lanchester. — *Aerial Flight.*
9. Ozeen. — Beiträge zur Hydrodynamik (*Annalen der Physik*, 1915).
10. Poincaré (H.). — *Théorie des tourbillons* (Paris, 1893, Carré).
11. Prandtl (L.). — Ueber Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung (*Verhandl. des III Math. Kongresses in Heidelberg*, 1904).
12. — *Abriss der Lehre der Flüssigkeits- und Gasbewegung* (Iena, 1913, Fischer).
13. Rayleigh. — *Scientific Papers*, vol. 287.
14. Villat (H.). — Développements concernant l'Hydrodynamique (*Encyclopédie des Sciences mathématiques*, t. IV Paris, 1914, Gauthier-Villars et C^ie).

15. Helmholtz (Von). — Ueber diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen (*Monatsberichte der Akademie d. Wiss. zu Berlin*, Berlin, 1868).

II. — Théorie de Prandtl. Travaux de Göttingen.

16. Betz (A.). — Die gegenseitige Beeinflüssung zweier Tragflächen (*Z.F.M.*, 1914).
17. — Untersuchungen einer Joukowski'schen Tragfläche (*Z.F.M.*, 1915).
18. — Einfluss der Spannweite und Flächenbelastung auf die Luftkräfte von Tragflächen (*T.B.*, t. I).
19. — Beiträge zur Tragflügeltheorie mit besonderer Berücksichtigung des einfachen rechteckigen Flügels. Dissertation. Göttingen, 1919.
20. — Schraubenpropeller mit geringstem Energieverlust, mit einem Zusatz von L. Prandtl (*N.G.W.*, 1919).
21. — Eine Erweiterung der Schraubenstrahltheorie (*Z.F.M.*, 1920).
22. Fuhrmann (G.). — Theoretische und experimentelle Untersuchungen an Ballonmodellen (*Jahrb.* 1911-1912 *der Motorluftschiff. Studiengesellschaft*).
23. Munk (M.). — Beitrag zur Aerodynamik der Flugzeugtragorgane (*T.B.*, t. II).
24. — Isoperimetrische Aufgaben aus der Theorie des Fluges (*Dissertation Göttingen*, 1919).
25. Prandtl (L.). — Tragflügeltheorie : I und II. Mitteilung (*N.G.W.*, 1918, 1919).
26. — Tragflächen-Auftrieb und Widerstand in der Theorie (*Jahrb. der Wiss. Ges. für Luftfahrt*, 1920).
27. — Der induzierte Widerstand von Mehrdeckern (*T.B.*, t. III).
28. — Die neuere Fortschritte der Tragflügeltheorie (*Zeitschrift des Vereines d. deutscher Ing.*, sept. 1921).
29. — Applications of modern Hydrodynamics to Aeronautics (Report n° 116, *N.A.C.*, 1921).
30. Wieselsberger (C.). — *Experimentelle Prüfung der Umrechnungsformeln. Ergebnisse der Aerodynamischen Versuchsanstalt* (München, 1921).

III. — Mouvement des fluides parallèlement à un plan fixe.

31. Grammel (R.). — *Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges* (Braunschweig, 1917).

32. Joukowski (N.). — (En russe). *Modification de la méthode de Kirchhoff* (Moscou, 1890).
33. — (En russe). Sur les tourbillons adjoints (*Société des Amis des Sciences naturelles*, Moscou, t. XIII, fasc. 2).
34. — Ueber die Konturen der Tragfläche der Drachenflieger (*Z.F.M.*, 1910).
35. Kutta (W.-M.). — Auftriebskräfte in strömenden Flüssigkeiten (*Illustr. aeronaut. Mitteilungen*, 1902).
36. Levi-Civita. — Scie e leggi di resistenza (*Rendiconti del Circolo di Palermo*, 1907).
37. Mises (R.). — Zur Theorie des Tragflächenauftriebs (*Z.F.M.*, 1917).
38. Tchapliguine. — (En russe). *De la pression exercée par un courant plan parallèle sur un corps immergé* (Moscou, 1910).
39. Villat (H.). — Mouvements parallèles à un plan fixe (*Cours de Mécanique* de P. Appell, t. III, Chap. XXXVI).

IV. — Résistance des fluides.

40. Bothezat (de). — An introduction to the laws of air resistance of the aerofoils (Report nº 28, *N.A.C.*).
41. Karman (Von) und Rubach. — Ueber den Mechanismus der Flüssigkeits- und Luftwiderstandes (*Physik. Zeitschrift*, 1912).
42. Martienssen. — Gesetze der Wasser- und Luftwiderstandes. Berlin, 1913 (Springer).
43. Villat (H.). — Aperçus théoriques sur la résistance des fluides (*Collection Scientia*, Paris, 1921, Gauthier-Villars et C^ie^).

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVANT-PROPOS 3

Ire PARTIE. — THÉORIE DES SURFACES PORTANTES.

INTRODUCTION 5

Exposé de la Théorie 16

I. Remarques préliminaires 16
II. Théorie du profil. Aile d'envergure infinie 22
III. Aile d'envergure finie. Cas du régime permanent 35
IV. Simplifications possibles de la théorie 46

ANNEXE I. — Détermination du potentiel polytrope autour d'un profil 52

ANNEXE II. — Calcul de la portance d'un profil 57

IIe PARTIE. — LES PROBLÈMES DE LA THÉORIE LINÉAIRE.

I. Formules générales de la théorie linéaire 63
II. Monoplan 64
III. Multiplans 77
IV. Systèmes portants de moindre résistance 87
V. Influence des parois et des surfaces libres aux limites du fluide. 98
VI. Les conditions à une grande distance à l'aval de l'aile 109
VII. Application de la théorie aux hélices 119
VIII. Utilisation et avenir de la théorie 124

Bibliographie 127

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET C^ie^,
69013 Quai des Grands-Augustins, 55.

SECONDE THÈSE.

PROPOSITION DONNÉE PAR LA FACULTÉ.

Sur les recherches récentes d'hydrodynamique, concernant la résistance des fluides.

Vu et approuvé :

Strasbourg, le 10 février 1923.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

P. MULLER.

Vu et permis d'imprimer :

Strasbourg, le 12 février 1923.

Le Recteur de l'Université de Strasbourg.

S. CHARLÉTY.

69535 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

69535 PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
Quai des Grands-Augustins, 55.